Maria Inês Tomás de Oliveira Pascoal de Sousa Dias

Mestre em Probabilidades e Estatística

Relatório de Estágio
e
Influência da Calculadora Gráfica no Processo de Demonstração

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Auxiliar
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes
Professora no Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente: Prof.ª Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogais: Prof.ª Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho, 2019

Maria Inês Tomás de Oliveira Pascoal de Sousa Dias

Relatório de Estágio

e

Influência da Calculadora Gráfica no Processo de Demonstração

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientadora: Professora Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Professora Auxiliar
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa

Coorientadora: Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes
Professora no Agrupamento de Escolas António Gedeão

Júri:

Presidente: Prof.ª Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos
Vogais: Prof.ª Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha
Licenciada Maria do Rosário Dias Gaiteiro Lopes

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Julho, 2019

Influência da calculadora gráfica no processo de demonstração

Aos meus filhos: Afonso, Clara e Matilde

Agradecimentos

À Professora Doutora Helena Rocha que me orientou, o meu reconhecimento e agradecimento pela disponibilidade bem como pelos seus conselhos e orientação, sem os quais não teria sido possível realizar o trabalho de investigação.

À Professora Rosário Lopes por todo o apoio e incentivo, pela sua disponibilidade, pela experiência proporcionada, por tudo o que aprendi consigo.

À Carina, ao Frederico, ao Milton e à Rita pela amizade, pela partilha e por me acompanharem nesta etapa.

Aos alunos que acompanhei, em especial aos que participaram no estudo.

A todos os que apoiaram este trabalho.

À minha mãe e irmãs, pelo carinho, pelo apoio incondicional, pela disponibilidade.

Ao meu pai sempre presente na minha memória, que me ensinou a nunca desistir e a lutar pelo que queremos mesmo quando parece já não existirem soluções.

Ao António pelo apoio incondicional que sempre me deu, sabendo respeitar o meu espaço e o meu tempo. Pelo amor.

Ao Afonso, à Clara e à Matilde por serem exemplo de força. Por compreenderem a minha ausência em alguns momentos. Por existirem na minha vida. Pelos abraços, os sorrisos e por todo o amor.

Resumo

Aliada à prática pedagógica um professor é um constante observador. Atualmente é possível encontrar docentes que para além da sua prática letiva realizam trabalhos de investigação. Durante o ano de estágio pedagógico, foi também realizado um trabalho de investigação, com alguns alunos da turma de 10.º ano que a professora estagiária acompanhou. Esta dissertação espelha o trabalho desenvolvido, durante o ano letivo de 2018/2019, estando dividida em duas partes distintas. A primeira parte apresenta o relatório realizado no âmbito da prática pedagógica supervisionada, enquanto, que a segunda, é dedicada à investigação desenvolvida.

O relatório de estágio compreende o trabalho desenvolvido no âmbito da prática pedagógica supervisionada. Contempla uma breve caraterização da rede escolar do concelho de Almada, bem como a caracterização do agrupamento escolar onde o estágio pedagógico foi desenvolvido. Termina com uma reflexão crítica que assenta, essencialmente, nos aspetos mais significativos da prática pedagógica.

No trabalho de investigação procurou-se compreender a capacidade de demonstração Matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade, num contexto de utilização da calculadora gráfica. Na busca de alcançar os objetivos traçados pretende-se responder às seguintes questões de investigação:

1. Qual o entendimento que os alunos têm de demonstração? Qual a importância que lhe atribuem?
2. De que modo os alunos formulam conjeturas? E de que forma o raciocínio que desenvolvem se relaciona com a utilização da calculadora gráfica na sua atividade com funções?
3. Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica sobre o processo de demonstração desenvolvido pelos alunos?

O estudo segue uma metodologia qualitativa desenvolvida em cinco estudos de caso. Utiliza técnicas de recolha de dados baseadas em entrevistas semiestruturadas e na observação de alunos, durante a resolução das tarefas criadas para o estudo.

As conclusões do estudo realizado sugerem que a maioria dos alunos sabe o que é uma demonstração, e considera-a importante na compreensão dos conteúdos matemáticos. Indica também, que o uso da calculadora gráfica influencia positivamente a atividade com funções, tanto na formulação da conjetura, como no processo de construção da demonstração.

Palavras-Chave: Estágio pedagógico; demonstração; conjetura; calculadora gráfica; funções

Abstract

Allied to pedagogical practice, a teacher is a constant observer. Currently, it is possible to find teachers who, in addition to teaching practice, execute research work. During the pedagogic training year, a research work was also fulfilled, with some students in the 10th grade class that the trainee teacher followed. This dissertation reflects the work developed during the school year 2018/2019, being divided into two distinct parts. The first part presents the report executed in the context of pedagogical practice supervision, while the second part is dedicated to the research developed.

The internship report includes the work developed within the domain of supervised pedagogical practice. It includes a brief characterization of the school network of the county of Almada as well as the characterization of the school grouping where the pedagogical stage was developed. It ends with a critical reflection that is based essentially on the most significant aspects of pedagogical practice.

In the research work we tried to understand the mathematical demonstration capacity of students in the 10th grade, in a context of using the graphic calculator. In order to reach the objectives outlined, it is intended to answer the following research questions:

1. What understanding do students have of proof? How important is it?
2. How do students make conjectures? And in what way do the reasoning they develop relate to the use of the graphic calculator in its activity with functions?
3. What is the impact of using the graphic calculator on the proof process developed by students?

The study follows a qualitative methodology developed in five case studies. It uses data collection techniques based on semi-structured interviews and student observation, during the resolution of the tasks created for the study.

The conclusions of the study suggest that most students know what a proof is, and considers it important in understanding mathematical content. It also indicates that the use of the graphic calculator is a positive influence in activities with functions, both in the formulation of the conjecture and in the process of construction of the proof.

Keywords: Pedagogical training; proof; conjecture; graphic calculator; functions

Índice

AGRADECIMENTOS .... **VII**

RESUMO .... **IX**

ABSTRACT .... **XI**

ÍNDICE DE TABELAS .... **XVII**

ÍNDICE DE FIGURAS .... **XVIII**

PARTE I – RELATÓRIO DE ESTÁGIO **1**

1. O CONCELHO DE ALMADA **3**

1.1. NOTA HISTÓRICA 3

1.2. CARACTERIZAÇÃO 3

1.3. REDE EDUCATIVA 5

1.3.1. Ensino Regular Público *5*

1.3.2. Outras Ofertas de Ensino *6*

2. AGRUPAMENTO DE ESCOLAS ANTÓNIO GEDEÃO **7**

2.1. CARACTERIZAÇÃO DO AGRUPAMENTO 7

2.1.1. Alunos e Turmas *8*

2.1.2. Recursos Humanos *9*

2.1.3. Princípios Orientadores *10*

2.1.4. Necessidades Educativas Especiais *11*

2.2. ESCOLA SECUNDÁRIA ANTÓNIO GEDEÃO 11

2.3. ANTÓNIO GEDEÃO – O PATRONO 12

3. CARACTERIZAÇÃO DAS TURMAS DE ESTÁGIO **3**

3.1. CARACTERIZAÇÃO DA TURMA DO 10.º ANO 3

3.2. CARACTERIZAÇÃO DA TURMA DO 9.º ANO 8

4. PRÁTICA PEDAGÓGICA SUPERVISIONADA **9**

4.1. PLANOS DE AULA 9

4.2. PRÁTICA PEDAGÓGICA NA TURMA DO 10.º ANO 10

4.2.1. Primeiro período *10*

4.2.2. Segundo período *16*

4.2.3. Terceiro período *24*

4.3. AVALIAÇÃO 29

4.4. DIREÇÃO DE TURMA 30

4.5. PRÁTICA PEDAGÓGICA NA TURMA DO 9.º ANO 30

4.6. OUTRO TRABALHO REALIZADO NA ESCOLA 37
4.6.1. Reuniões *37*
4.6.2. Workshop *38*
4.6.3. O dia da Matemática *38*
5. REFLEXÃO SOBRE A PRÁTICA PEDAGÓGICA 41
PARTE II - INVESTIGAÇÃO 45
1. INTRODUÇÃO 47
1.1. MOTIVAÇÃO E PERTINÊNCIA DO ESTUDO 47
1.2. OBJETIVOS E QUESTÕES DE INVESTIGAÇÃO 49
1.3. ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO DE INVESTIGAÇÃO 50
2. REVISÃO DE LITERATURA 53
2.1. ENTENDIMENTO DE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA 53
2.2. FUNÇÃO DA DEMONSTRAÇÃO NO ENSINO DA MATEMÁTICA 56
2.3. RACIOCÍNIO INDUTIVO E DEDUTIVO 57
2.4. RACIOCÍNIO DEDUTIVO E FUNÇÕES 59
2.5. NOVAS TECNOLOGIAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA 60
3. METODOLOGIA 63
3.1. INVESTIGAÇÃO QUALITATIVA 63
3.2. ESTUDO DE CASO 64
3.3. INSTRUMENTOS DE RECOLHA DE DADOS 65
3.3.1. Observação *66*
3.3.2. Entrevista *67*
3.3.3. Questionário *68*
3.3.4. Recolha documental *68*
3.4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ADOTADOS 69
3.4.1. Critérios de seleção dos participantes *69*
3.4.2. Estratégias de recolha de dados *70*
1.4.3. Sessões de trabalho *71*
1.4.4. Tarefas *71*
4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS 73
4.1. CLARA 73
4.1.1. Demonstração – noção e importância *73*
4.1.2. Tarefa 1 ..... *75*
4.1.3. Tarefa 2 ..... *78*
4.1.4. Tarefa 3 ..... *80*
4.1.5. Comentário Final *83*

4.2. AFONSO 84
4.2.1. Demonstração – noção e importância *84*
4.2.2. Tarefa 1 .... *86*
4.2.3. Tarefa 2 .... *89*
4.2.4. Tarefa 3 .... *92*
4.2.5. Comentário Final *95*
4.3. MATILDE 96
4.3.1. Demonstração – noção e importância *96*
4.3.2. Tarefa 1 .... *98*
4.3.3. Tarefa 2 .... *100*
4.3.4. Tarefa 3 .... *102*
4.3.5. Comentário Final *105*
4.4. JOÃO 106
4.4.1. Demonstração – noção e importância *106*
4.4.2. Tarefa 1 .... *108*
4.4.3. Tarefa 2 .... *109*
4.4.4. Tarefa 3 .... *112*
4.4.5. Comentário Final *114*
4.5. TERESA 115
4.5.1. Demonstração – noção e importância *115*
4.5.2. Tarefa 1 .... *117*
4.5.3. Tarefa 2 .... *119*
4.5.4. Tarefa 3 .... *121*
4.5.5. Comentário Final *122*
5 CONCLUSÕES 125
5.1. NOÇÃO E IMPORTÂNCIA DE DEMONSTRAÇÃO 125
5.2. UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA *VS* FORMULAÇÃO DE CONJETURAS 126
5.3. IMPACTO DA UTILIZAÇÃO DA CALCULADORA GRÁFICA SOBRE O PROCESSO DE DEMONSTRAÇÃO 127
5.4. CONSIDERAÇÕES FINAIS 128
REFERÊNCIAS 131
ANEXOS 135
ANEXO 1 137
ANEXO 2 139
ANEXO 3 140
ANEXO 4 141

ANEXO 5 143
ANEXO 6 144

Índice de Tabelas

Tabela 1.1 – Número de alunos e número de salas por nível de ensino no Concelho de Almada 5
Tabela 2.1 - Número de alunos e número de turmas por nível de ensino no Agrupamento 8
Tabela 2.2 - Número de alunos e número de turmas por escola 8
Tabela 2.3 – Recursos Humanos do Agrupamento António Gedeão 10
Tabela 2.4 – Número de alunos e turmas por ano de escolaridade na ESAG 12
Tabela 3.1 – Número de alunos por idade e sexo. 8
Tabela 4.1 – critérios de avaliação das turmas de 10.º ano da ESAG 29

Índice de Figuras

PARTE I – RELATÓRIO DE ESTÁGIO

FIGURA 1.1 – ENQUADRAMENTO GEOGRÁFICO 4

FIGURA 2.1 – ESCOLAS DO AGRUPAMENTO 7

FIGURA 2.2 – DISTRIBUIÇÃO DOS AUXÍLIOS ECONÓMICOS POR GRAU DE ENSINO 8

FIGURA 2.3 – AUXÍLIOS ECONÓMICOS 9

FIGURA 3.1 – CARACTERIZAÇÃO DA TURMA DE 10.º ANO QUANTO AO GÉNERO (A) E QUANTO À IDADE (B). 3

FIGURA 3.2 – NÍVEL OBTIDO A MATEMÁTICA NO FINAL DE CADA ANO DO 3.º CICLO E NO EXAME NACIONAL. 4

FIGURA 3.3 – PERCENTAGEM DE POSITIVAS E NEGATIVAS AO LONGO DO ANO LETIVO 5

FIGURA 3.4 – DISTRIBUIÇÃO DOS ALUNOS POR DIVERSOS NÍVEIS DE CLASSIFICAÇÃO 5

FIGURA 3.5 – HÁBITOS DE TRABALHO DOS ALUNOS: REGISTOS NO CADERNO DIÁRIO EM AULA (A) E REALIZAÇÃO DE TRABALHOS DE CASA (B) 6

FIGURA 3.6 – HÁBITOS DE ESTUDO À DISCIPLINA DE MATEMÁTICA A. 6

FIGURA 3.7 – CLASSIFICAÇÃO SOCIOECONÓMICA DOS AGREGADOS FAMILIARES DOS ALUNOS 7

FIGURA 3.8 – HABILITAÇÕES LITERÁRIAS DOS PAIS DOS ALUNOS 7

FIGURA 3.9 – PERCENTAGEM DE POSITIVAS E NEGATIVAS AO LONGO DOS TRÊS PERÍODOS 8

FIGURA 4.1 – ALGUNS DOS MATEMÁTICOS DA INICIATIVA "UM MATEMÁTICO EM CADA PORTA" 39

FIGURA 4.2 – INÊS GUIMARÃES DURANTE A PALESTRA DO DIA DA MATEMÁTICA 40

PARTE II – INVESTIGAÇÃO

FIGURA 4.1 – REGISTO DA CONJETURA ELABORADA POR CLARA NA TAREFA 1 76

FIGURA 4.2 – REGISTO DA DEDUÇÃO FEITA POR CLARA NA TAREFA 1 77

FIGURA 4.3 – CONJETURA ELABORADA POR CLARA NA TAREFA 2 79

FIGURA 4.4 – DEMONSTRAÇÃO REALIZADA POR CLARA NA TAREFA 2 79

FIGURA 4.5 – CONJETURA ELABORADA POR CLARA NA TAREFA 3 81

FIGURA 4.6 – DEDUÇÃO REALIZADA POR CLARA NA TAREFA 3 82

FIGURA 4.7 – DETERMINAÇÃO ANALÍTICA DO ZERO DA FUNÇÃO *F*, FEITA POR AFONSO 87

FIGURA 4.8 – REGISTO DA CONJETURA ELABORADA POR AFONSO NA TAREFA 1 87

FIGURA 4.9 – REGISTO DA DEDUÇÃO FEITA POR AFONSO NA TAREFA 1 88

FIGURA 4.10 – CONJETURA ELABORADA POR AFONSO NA TAREFA 2 90

FIGURA 4.11 – DEDUÇÃO REALIZADA POR AFONSO NA TAREFA 2 91

FIGURA 4.12 – CONJETURA ELABORADA POR AFONSO NA TAREFA 3. 92

FIGURA 4.13 – DEDUÇÃO REALIZADA POR AFONSO NA TAREFA 3 94

FIGURA 4.14 – REGISTO DA CONJETURA E DA DEDUÇÃO ELABORADAS POR MATILDE NA TAREFA 1 99

Figura 4.15 – Conjetura elaborada por Matilde na tarefa 2 100
Figura 4.16 – Dedução realizada por Matilde na tarefa 2 101
Figura 4.17 – Conjetura elaborada por Matilde na tarefa 3 102
Figura 4.18 – Dedução realizada por Matilde na tarefa 3 104
Figura 4.19 – Registo da conjetura elaborada por João na tarefa 1 108
Figura 4.20 – Conjetura elaborada por João na tarefa 2 110
Figura 4.21 – Dedução realizada por João na tarefa 2 111
Figura 4.22 – Conjetura elaborada por João na tarefa 3 113
Figura 4.23 – Dedução realizada por João na tarefa 3 113
Figura 4.24 – Registo da conjetura elaborada por Teresa na tarefa 1 117
Figura 4.25 – Registo da dedução feita por Teresa na tarefa 1 118
Figura 4.26 – Conjetura elaborada por Teresa na tarefa 2 119
Figura 4.27 – Dedução realizada por Teresa na tarefa 2 120
Figura 4.28 – Conjetura elaborada por Teresa na tarefa 3 122

Parte I – Relatório de Estágio

1. O Concelho de Almada

> ... Ao sul do rio fica Almada, região abundante de vinha, figos e romãs. A terra é ali tão fértil de searas, que da mesma semente se recolhe o fruto duas vezes, e rica de mel e celebrada pelas montarias de animais (Cruzado Osberno, século XII, citado por Romeu Correia, 1978)

1.1. Nota Histórica

A localização estratégica de Almada, a proximidade do rio Tejo bem como a abundância de recursos naturais contribuíram desde sempre para a fixação de indivíduos, desde a pré-história até à atualidade. Fenícios, romanos e árabes por cá assentaram e deixaram a sua marca, incluído a marca no nome da terra, Al-Madan (Terra da Mina, assim designada devido a uma mina de ouro aqui existente), o qual evoluiu mais tarde para atual designação - Almada.

Devido à sua importância económica e estratégica foi uma das primeiras terras da margem sul do Tejo a obter a categoria de vila, em 1185, vindo a receber o seu 1.º foral, pelas mãos de D. Sancho I, em 1190. Em 1513, foi concedido novo foral por D. Manuel I. O poder real foi reforçado e a autonomia política e económica dos concelhos circunscrita. Almada torna-se num dos principais portos marítimos para troca de mercadorias, e a partir da segunda metade do século XIX a área ribeirinha alcança o seu maior desenvolvimento, acompanhando o desenvolvimento da Capital. A 22 de Outubro de 1926, Almada foi desanexada do distrito de Lisboa, passando a fazer parte do novo distrito de Setúbal. (Decreto n.º 12870). É elevada a Cidade a 21 de Junho de 1973. (D.L. n.º 308, de 16 de Junho)

A excelente localização de Almada, bem como a sua presença nos grandes momentos da História de Portugal contribuiu e contribui para o surgimento e vinculação de muitos homens e mulheres ilustres ligados às artes, letras e ciências, e para o aumento da cultura, educação e desenvolvimento do concelho.

1.2. Caracterização

Almada é um concelho da região centro de Portugal Continental na margem esquerda do Rio Tejo (região noroeste da Península de Setúbal). Pertence ao Distrito de Setúbal, Área Metropolitana de Lisboa e Sub-região da Península de Setúbal. Estende-se por uma área de aproximadamente de 72 km^2, dividida administrativamente em 5 freguesias (fruto da reorganização administrativa do país em 2013). O concelho faz fronteira com o Rio Tejo e Lisboa (a Norte), o concelho do Seixal (a Este), o concelho de Sesimbra (a Sul) e o Oceano Atlântico (a Oeste).

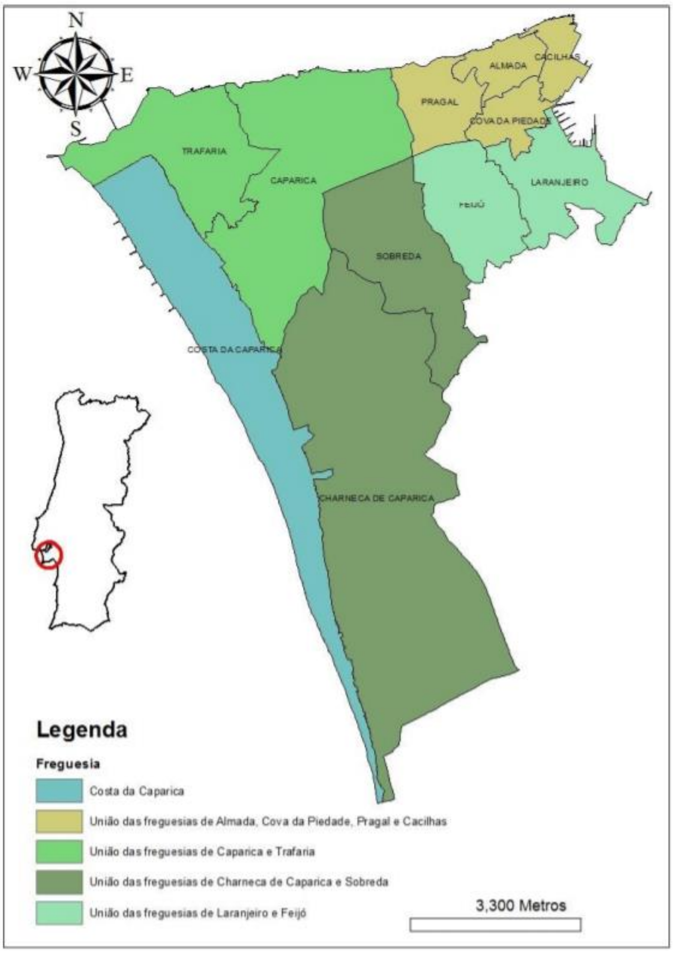


Figura 1.1 – Enquadramento Geográfico

(Fonte: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/15928/1/ulfc112563_tm_Laura_Simas.pdf)

A Norte, destaca-se uma faixa ribeirinha com 10 km de extensão e a Oeste, na frente Atlântica, uma linha marítima com mais de 13 km de praia, suportada e valorizada pela Arriba Fóssil da Costa da Caparica e Mata dos Medos (reservas naturais).

De acordo com os resultados definitivos dos Censos 2011, nesse ano, a população residente no município de Almada era de 174030 indivíduos. Cerca de 6% dos residentes não nasceu em Portugal, sendo que destes aproximadamente 40% tem nacionalidade brasileira. Embora, o envelhecimento da população se faça sentir no concelho, é de relevar que também o número de jovens aumentou neste município, apesar de não tão significativamente. No entanto, segundo os mesmos resultados, quase metade da população, tinha à data, menos de 40 anos de idade e cerca de 56% da população tinha entre 25 e 65 anos de idade. Relativamente à formação escolar apenas 14,5% da população detinha formação concluída no ensino superior e somente metade da população tinha grau de escolaridade superior ou igual ao 3.º Ciclo do ensino básico. A taxa de analfabetismo ainda ocorre com alguma expressão, 3,27%, com maior incidência na população feminina.

1.3. Rede Educativa

Membro da Associação Internacional das Cidades Educadoras (AICE)[1] desde 1997, Almada aposta no ensino como um pilar estratégico do desenvolvimento local. Esta missão assenta no compromisso do diálogo, da transversalidade das ações, da relação entre administrações (local, regional e central) e a sociedade civil de modo a percorrer novos caminhos e novas experiências educadoras.

O concelho está munido de diversas opções educativas quer no âmbito da educação formal, como no da educação não formal. Detém uma vasta rede de estabelecimentos de ensino, desde o pré-escolar ao ensino superior. O ensino profissional e sénior também se destaca. Atualmente o concelho de Almada conta com total de 129 estabelecimentos de ensino pertencentes à rede pública (45%), particular, cooperativo, solidariedade social e outros.

1.3.1. Ensino Regular Público

Dados cedidos pela Câmara Municipal de Almada indicam que, no início do ano letivo 2018/2019, o ensino regular da rede educativa do município de Almada, abarcava 23076 alunos, distribuídos pelas 60 escolas públicas existentes, de acordo com a Tabela 1.1:

Tabela 1.1 – Número de alunos e número de salas por nível de ensino no Concelho de Almada

	N.º Alunos	N.º Turmas
Pré-Escolar	2111	92
1.º Ciclo	6526	287
2.º Ciclo	3732	163
3.º Ciclo	5578	244
Secundário	5129	211
Total	**23076**	**997**

No concelho de Almada existem 13 agrupamentos escolares, nos quais se integram 58 estabelecimentos de ensino e duas escolas secundárias não agrupadas. Nestes estabelecimentos é possível encontrar 37 Jardins de infância, 39 escolas de 1.º ciclo, 9 escolas do 2.º e 3.º ciclos do Ensino Básico, 3 escolas secundárias com 2.º e 3.º Ciclos e 7 escolas do Ensino Secundário.

No que se refere à promoção da inclusão de alunos com Necessidades Educativas Especiais, o concelho tem 4 tipos de respostas diferenciadas, em 17 escolas dos diferentes níveis de ensino.

[1]Associação Internacional das Cidades Educadoras (AICE) é uma Associação sem fins lucrativos, fundada em 1994, constituída como uma estrutura permanente de colaboração entre governos locais que se comprometem a reger-se pelos princípios inscritos na Carta das Cidades Educadoras

1.3.2. Outras Ofertas de Ensino

Para quem não pretende seguir o ensino regular o concelho dispõe de vários cursos profissionais, com uma forte interligação com o sector empresarial local e regional. Este tipo de ensino promove uma aprendizagem estimulando o desenvolvimento de competências para o exercício de uma profissão. Atualmente muitas das escolas secundárias já oferecem várias opções educativas ao nível do ensino profissional. No entanto, no concelho de Almada existem duas escolas profissionais: a Escola Profissional de Almada, situada na União das Freguesias de Almada, Cova da Piedade, Pragal e Cacilhas e a Escola Profissional de Educação para o Desenvolvimento, na União das Freguesias de Caparica e Trafaria.

Almada detém o 2.º maior pólo universitário da Área Metropolitana de Lisboa. Aqui, estão sediadas várias instituições de ensino superior: Faculdade de Ciências e Tecnologia, da Universidade Nova de Lisboa, Escola Superior de Educação (Instituto Piaget), Instituto de Estudos Interculturais e Transdisciplinares (Instituto Piaget), Escola Superior de Saúde Egas Moniz, Instituto Superior de Ciências da Saúde Egas Moniz, Escola Naval e Escola Superior de Tecnologias Navais.

O Conselho da Europa define a educação não formal como um processo de aprendizagem social, centrado no indivíduo. É uma educação complementar ao ensino formal, voluntária (depende da vontade do formando) e não hierárquica por natureza. Contempla uma infinidade de formatos distintos. Neste sentido, a rede educativa de Almada incorpora, várias ofertas espalhadas por todo o território do concelho, como por exemplo: Academia de Música de Almada, Conservatório de Almada, Quebra Notas, Centro de Arte & Comunicação Visual (Ar.Co), Academia Ramiro de Freitas, Edufoco, Almadaforma e Centro para a Qualificação e o Ensino Profissional.

E “como o saber não ocupa lugar” e “nunca é tarde para aprender” também se destacam universidades Sénior do concelho: Universidade Sénior de Almada (USALMA) e a Universidade Sénior Dom Sancho I. Este tipo de ensino proporciona aos mais idosos uma diversificada oferta educativa, a nível curricular, e atividades culturais e de lazer. Privilegia a integração social e cultural e contribui para a construção de uma sociedade mais justa e tolerante.

2. Agrupamento de Escolas António Gedeão

2.1. Caracterização do Agrupamento

O Agrupamento de Escolas António Gedeão (Código 170940) é um dos 13 Agrupamentos de Escolas do concelho de Almada. Foi criado a 26 de abril de 2013, no âmbito do despacho de 01/04/2013 do Secretário de Estado do Ensino e da Administração Escolar, de modo a agregar várias escolas de todos os níveis de ensino. A sua área de influência abarca a União das Freguesias Laranjeiro – Feijó e a União das Freguesias da Cova da Piedade, Almada, Pragal e Cacilhas. O Agrupamento agrega as seguintes seis escolas:

- Escola Secundária de António Gedeão
- Escola Básica Comandante Conceição e Silva
- Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade
- Escola Básica n.º 2 da Cova da Piedade
- Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro
- Escola Básica do Alfeite

Escola Secundária de António Gedeão

Escola Básica Comandante Conceição e Silva

Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade

Escola Básica n.º 2 da Cova da Piedade

Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro

Escola Básica do Alfeite

Figura 2.1 – Escolas do Agrupamento

2.1.1. Alunos e Turmas

Segundo informação fornecida pelo agrupamento no ano letivo 2018/2019, estudam no agrupamento um total de 2112 alunos. A distribuição de alunos e turmas por nível de ensino, pode ser observada na Tabela 2.1:

Tabela 2.1 - Número de alunos e número de turmas por nível de ensino no Agrupamento

	N.º Alunos	N.º Turmas
Pré-Escolar	223	10
1.º Ciclo	799	34
2.º Ciclo	414	17
3.º Ciclo	413	18
Secundário	263	13
Total	**2112**	**92**

Todas as escolas básicas do agrupamento, com exceção da Escola Básica Comandante Conceição e Silva onde apenas são lecionados o 5.º e 6.º de escolaridade, são escolas de 1.º Ciclo com jardim de infância. A escola sede é uma escola secundária com 3.º Ciclo, sendo a que acolhe maior número de alunos e turmas, como se observa na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Número de alunos e número de turmas por escola

	N.º Alunos	N.º Turmas
Escola Secundária de António Gedeão	676	31
Escola Básica Comandante Conceição e Silva	414	17
Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade	190	8
Escola Básica n.º 1 da Cova da Piedade	177	7
Escola Básica n.º 3 do Laranjeiro	284	13
Escola Básica do Alfeite	371	16

No presente ano letivo há 583 alunos do agrupamento (26,4%) que beneficiam de auxílios económicos. Destes, 42% frequentam o infantário ou o 1.º Ciclo. Apenas 13% dos alunos com auxílio económico frequentam o ensino secundário (ver Figura 2.2).

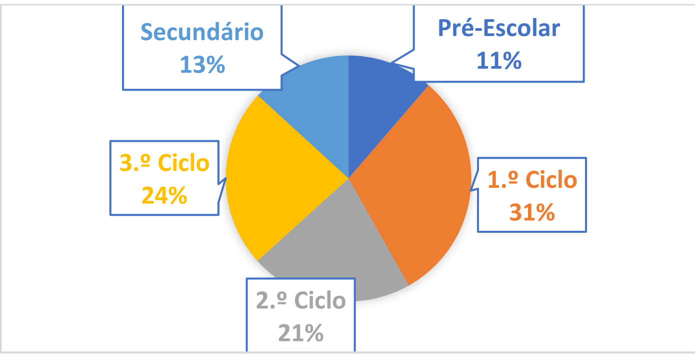


Figura 2.2 – Distribuição dos auxílios económicos por grau de ensino

Os alunos do 3.º Ciclo são os que mais beneficiam de apoio, cerca de 33%. Por sua vez, apenas 22,3% dos alunos do 1.º Ciclo têm auxílio económico.

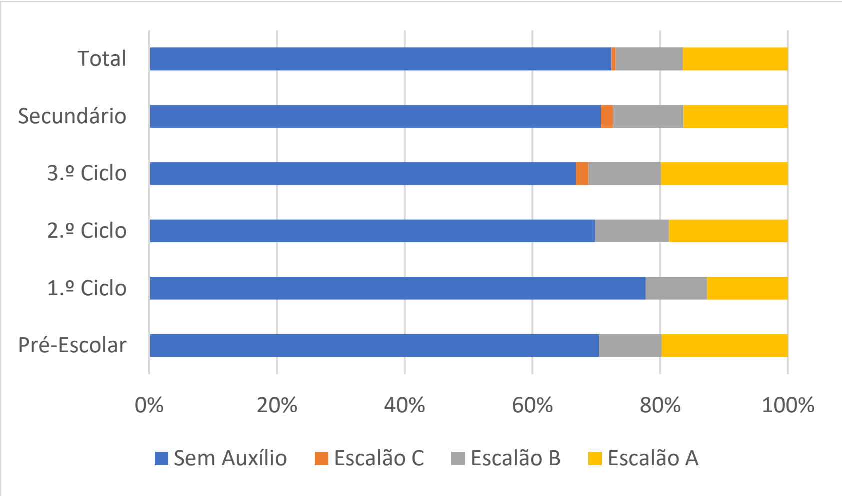


Figura 2.3 – Auxílios Económicos

Tal como observado na Figura 2.3, o escalão C é pouco expressivo no agrupamento. Menos de 1% dos alunos tem este escalão atribuído e todos os alunos que dele beneficiam frequentam o 3.º Ciclo ou o ensino secundário. Note-se que os alunos apoiados se encontram maioritariamente no escalão A, cerca de 16,5%. Nesse escalão encontram-se 20% dos alunos do 3.º Ciclo e o mesmo acontece com crianças do pré-escolar que o têm atribuído.

Fruto da imigração, as escolas portuguesas são cada vez mais instituições multiculturais. Esta realidade, também está presente no agrupamento, com 101 estudantes estrangeiros distribuídos pelas várias escolas do agrupamento. A fim de melhorar a integração dos alunos estrangeiros e de os apoiar enquanto estudantes, o Projeto Educativo 2016-2019 da escola estabelece como critério de formação de turmas que:

> Os alunos provenientes de países estrangeiros que revelem especiais dificuldades ao nível do Português deverão, quando tal for possível, ser integrados na mesma turma a fim de facilitar a prestação do apoio pedagógico previsto, ao nível de PLNM. (p.17)

2.1.2. Recursos Humanos

De modo a que todas as escolas do Agrupamento possam garantir um ensino de qualidade aos alunos é necessário não esquecer o papel fundamental de todos os que ali trabalham. Dos que todos os dias contribuem para o bom funcionamento da escola e dos que de forma dedicada tentam incentivar nos alunos a vontade de aprender cada vez mais e melhor.

No Agrupamento, trabalham 200 docentes e 76 não docentes, num total de 276 funcionários. Na Tabela 2.3 é possível observar a sua distribuição segundo o vínculo contratual.

Tabela 2.3 – Recursos Humanos do Agrupamento António Gedeão

Docentes					
Categoria	Vínculo				Total
	QA[2]	QZP[3]	Contratados	Técnicos Especializados	Total
Docentes	156	20	23	1	200

Não Docentes			
Categoria	Vínculo		Total
	Contrato de Trabalho		
	Termo Indeterminado	Termo Resolutivo Certo	
Assistentes Operacionais	40	27	67
Assistentes Técnicos	9	-	9

2.1.3. Princípios Orientadores

O Regulamento Interno do Agrupamento de Escolas António Gedeão para o período 2014-2018 e ainda em vigor (sendo o presente ano letivo um ano de transição nos órgãos administrativos, o diretor da escola, após auscultação do Conselho Pedagógico, propôs apenas a atualização deste documento), define o regime de funcionamento do agrupamento e estipula os seguintes princípios orientadores:

a) Promover o sucesso, prevenir o abandono escolar dos alunos, desenvolver a qualidade do serviço público de educação, em geral, e das aprendizagens e dos resultados escolares, em particular;

b) Promover a equidade social, criando condições para a concretização da igualdade de oportunidades para todos;

c) Promover o mérito e a disciplina e contribuir para o desenvolvimento de uma cultura de cidadania;

d) Assegurar as melhores condições de estudo e de trabalho, de realização e de desenvolvimento pessoal e profissional;

e) Cumprir e fazer cumprir os direitos e os deveres constantes das leis, normas ou regulamentos e manter a disciplina;

f) Observar o primado dos critérios de natureza pedagógica sobre os critérios de natureza administrativa nos limites de uma gestão eficiente dos recursos disponíveis para o desenvolvimento da sua missão;

g) Assegurar a estabilidade e a transparência da gestão e da administração escolar, designadamente através dos adequados meios de comunicação e informação;

---

[2] Quadro de Agrupamento
[3] Quadro de Zona Pedagógica

h) Proporcionar condições para a participação dos membros da comunidade educativa e promover a sua iniciativa;

i) Assegurar o património das escolas do Agrupamento.

Segundo o Projeto Educativo o Agrupamento assume como missão, a formação integral dos alunos que o frequentam, tornando-os cidadãos de excelência, conscientes, críticos e preparados para os desafios do futuro. Rege-se por valores como Inclusão, Solidariedade, Equidade, Cooperação, Liberdade, Ética, Responsabilidade Ambiental e Respeito. A diversidade da oferta educativa, desde a educação pré-escolar até ao ensino secundário, incluindo os cursos profissionais e de educação e de formação, contribui para a dimensão inclusiva do Agrupamento.

2.1.4. Necessidades Educativas Especiais

Sendo diferentes como indivíduos somos todos iguais enquanto cidadãos. Cabe à escola promover a igualdade de oportunidades e a preparação de uma adequada formação profissionalizante e integração na vida pós-escolar, para qualquer aluno, independentemente das suas necessidades. A educação especial tem para lá desse objetivo, os de integração educativa e social, a promoção da autonomia, o desenvolvimento pessoal, social e das competências cognitivas, a estabilidade emocional. No agrupamento há mais de 100 crianças e jovens do 1.º ao 12.º ano que beneficiam de apoios específicos, de acordo com os respetivos planos educativos. Há a destacar também a existência de duas unidades de ensino estruturado, para 1.º e 2.º ciclos, que apoiam crianças com perturbação do espectro do autismo. Agrupamento apresenta-se como referência para a Intervenção Precoce na Infância (0 - 6 anos) no concelho de Almada e tem como objetivos: assegurar a articulação com os serviços de saúde e da segurança social; assegurar a prestação de serviços de Intervenção Precoce na Infância.

2.2. Escola Secundária António Gedeão

A Escola Secundária António Gedeão (ESAG), escola onde decorreu o estágio pedagógico, é a escola sede do Agrupamento. Foi construída em 1983 pelo Ministério da Educação e integra a rede de escolas públicas. Está localizada na Alameda Guerra Junqueiro, na periferia norte da União das Freguesias Laranjeiro – Feijó, no concelho de Almada. Encontra-se numa área maioritariamente residencial, com alguns espaços comerciais. Situa-se muito perto do Complexo Municipal dos Desportos da Cidade de Almada e do maior Parque Verde do município, o Parque da Paz. Serve essencialmente as populações residentes na área do Laranjeiro, Feijó e Cova da Piedade.

Tem uma boa oferta de serviços de transporte público que servem o Concelho de Almada, nomeadamente os autocarros urbanos dos Transportes Sul do Tejo e uma linha de metro ligeiro de superfície.

Inicialmente, a escola foi construída como escola de 3.º Ciclo do Ensino Básico passado a integrar o Ensino Secundário a partir de 1990. Em termos de infraestruturas a escola tem 6 pavilhões (A, D, E, H, L e R) com 25 salas de aulas, 11 salas específicas (laboratórios de Química, Física, Matemática, Ciências Naturais e Geologia, sala de Informática, de Educação Tecnológica, de Educação Visual e de Teatro), sala de professores, biblioteca, refeitório, Ginásio e Campo de Jogos.

Do ponto de vista da oferta educativa, para além do ensino regular, existe no 3.º Ciclo uma turma de 8.º ano com Percursos Curriculares alternativos (PCA)[4]. No Ensino Secundário a escola disponibiliza os Cursos: Científico-Humanísticos; Ciências e Tecnologias; Ciências Socioeconómicas e; Línguas e Humanidades. A oferta opcional de disciplinas para cada uma das formações específicas é atualizada anualmente em conformidade com a procura dos alunos. A oferta educativa abrange também os cursos Profissionais de Técnico de Turismo, Técnico de Animação Sociocultural e Técnico de Apoio à Infância, todos de nível III com equivalência ao 12.º ano.

Atualmente, frequentam a escola 676 alunos. Dos 413 alunos do ensino básico, 15 frequentam um curso PCA. No ensino secundário 224 estão integrados em cursos científico-humanísticos e 39 em cursos profissionais. A caracterização da escola em função do número de alunos e turmas por ano de escolaridade pode ser observada na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Número de alunos e turmas por ano de escolaridade na ESAG

Ano de Escolaridade	N.º Alunos	N.º Turmas
7.º	151	6
8.º	144	7 (1 PCA)
9.º	118	5
10.º	105	5 (2 Profissional)
11.º	63	3
12.º	95	5 (1 Profissional)

2.3. António Gedeão – o Patrono

Tudo fiz por amor (…) Foi assim que resolvi ir para o ensino, para o ensino secundário. (…) Porque aí, no secundário, os seres adolescentes, já criados e nutridos, já libertos da chupeta e do calor maternal, se preparam para rodar a cabeça em torno e se interrogarem a propósito de tudo. É a altura de se lhes sorrir e de se lhes transmitir as respostas que o adulto acumulou resumindo em si a experiência secular da humanidade. (Carvalho, 2016, p. 3, citando as Memórias de seu pai)

[4] Percursos Curriculares alternativos (PCA) são uma medida de promoção do sucesso educativo, no ensino básico. Oferta específica de natureza complementar a outras existentes tendo em vista a inclusão social e o cumprimento da escolaridade obrigatória.

António Gedeão, pseudónimo, adotado pelo professor, pedagogo, historiador e poeta, Rómulo de Carvalho. António, por ser o nome de um tio por quem tinha grande afeto. Gedeão, o nome de um aluno a que achou graça.

Rómulo Vasco da Gama de Carvalho nasceu em Lisboa a 24 de novembro de 1906. Seus pais eram naturais do Algarve. O pai funcionário dos Correios e Telégrafos e a mãe dona de casa. A veia artística já estava presente na família por parte do pai. O seu avô paterno, Sebastião Jaime da Gama Carvalho, foi um reconhecido compositor de música sacra e seu pai também escrevia versos.

Iniciou os estudos no Colégio de Santa Maria, em Lisboa, cidade onde estudou até 1928. Nessa altura mudou-se para o Porto, para frequentar o curso de Ciências Físico-Químicas, na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, que concluiu em 1931. Após três anos realizou o Exame de Estado para o Ensino Liceal, para a abraçar a carreira de professor, sonho que o comandou durante toda a sua vida. Durante a sua vida de docente lecionou em lisboa, no Liceu de Camões e no Liceu Pedro Nunes e em Coimbra no Liceu D. João III. Além de lecionar, também dirigiu a Gazeta de Física, da Sociedade Portuguesa de Física, e foi codiretor da revista Palestra do Liceu Pedro Nunes.

Desde cedo que começou a escrever. Segundo uma carta sua a Jorge de Sena, aos 5 anos já escrevia versos. Apesar de ter abraçado as ciências e de as ter ensinado de forma apaixonada e exímia, Rómulo de Carvalho nunca abandonou as letras, escrevendo poesia (e não só) até ao final dos seus dias. No entanto, só em 1956, já com cinquenta anos é que, sob o pseudónimo de António Gedeão, publicou o seu primeiro livro de poesia, Movimento Perpétuo.

Morreu aos 90 anos de idade, a 19 de fevereiro de 1997.

Impressão Digital

Os meus olhos são uns olhos,
e é com esses olhos uns
que eu vejo no mundo escolhos,
onde outros, com outros olhos,
não vêem escolhos nenhuns.

Quem diz escolhos, diz flores!
De tudo o mesmo se diz!
Onde uns vêem luto e dores,
uns outros descobrem cores
do mais formoso matiz.

Pelas ruas e estradas
onde passa tanta gente,
uns vêem pedras pisadas,
mas outros gnomos e fadas
num halo resplandecente!!

Inútil seguir vizinhos,
querer ser depois ou ser antes.
Cada um é seus caminhos!
Onde Sancho vê moinhos,
D. Quixote vê gigantes.

Vê moinhos? São moinhos!
Vê gigantes? São gigantes!

António Gedeão, in Movimento Perpétuo

3. Caracterização das turmas de Estágio

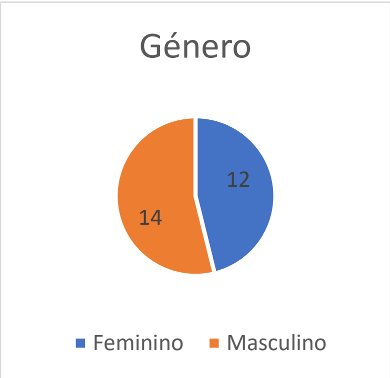
Durante a realização do estágio profissional acompanhei duas turmas. Uma turma de 10.º ano, que acompanhei a tempo integral e onde desenvolvi a maioria do trabalho pedagógico, e uma turma do 9.º ano a qual acompanhei regularmente, apenas numa das aulas semanais.

As informações usadas na caracterização da turma foram recolhidas por consulta dos processos individuais dos alunos, resultados efetivamente obtidos ao longo ano letivo, observação em aula ou de resultados de um questionário aplicado aos alunos da turma do 10.º ano.

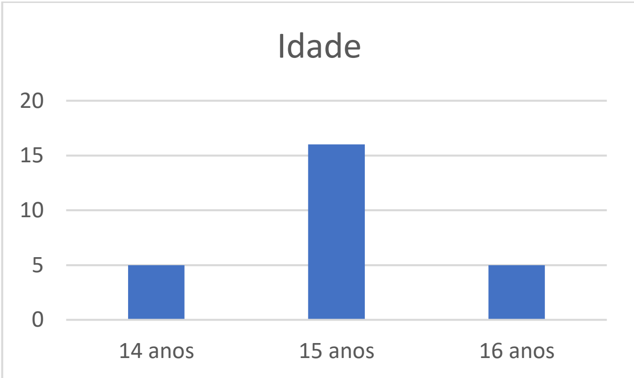
Para a turma do 9.º ano é feita uma caracterização menos pormenorizada, por ter havido um menor acompanhamento.

3.1. Caracterização da turma do 10.º Ano

A constituição da turma de 10.º ano sofreu alterações ao longo do ano. A meio do 1.º período um aluno mudou de curso e no final do mesmo período um outro emigrou. No início do 2.º período uma nova aluna veio integrar a turma. Neste momento a turma é constituída por 26 alunos, 12 raparigas e 14 rapazes. No início do ano letivo as suas idades variavam entre os 14 e os 16 anos de idade. Um dos alunos com 14 anos só fez os 15 anos em 2019. Estes resultados podem ser analisados na Figura 3.1.



(A)



(B)

Figura 3.1 – Caracterização da turma de 10.º ano quanto ao género (A) e quanto à idade (B)

Todos os alunos, à exceção de uma aluna, estão a frequentar a disciplina de Matemática A pela primeira vez. Três alunos não têm nacionalidade portuguesa. Destes, dois são oriundos de países cuja língua oficial é o português.

Apenas 5 alunos da turma frequentaram o 9.º ano de escolaridade num outro agrupamento (um deles fora de Portugal). A maioria reside União das Freguesias Laranjeiro – Feijó e a União das

Freguesias da Cova da Piedade, Almada, Pragal e Cacilhas. No entanto, um aluno reside numa outra freguesia do concelho de Almada e seis residem no concelho do Seixal.

Mais de metade dos alunos teve, no 9.º ano, nível quatro ou cinco a Matemática. Houve 5 alunos com nível 3 no 9.º ano, e também 5 alunos transitaram de ano com nível 2. É ainda de notar que 4 dos alunos tiveram nível 1 na prova de final de 3.º ciclo.

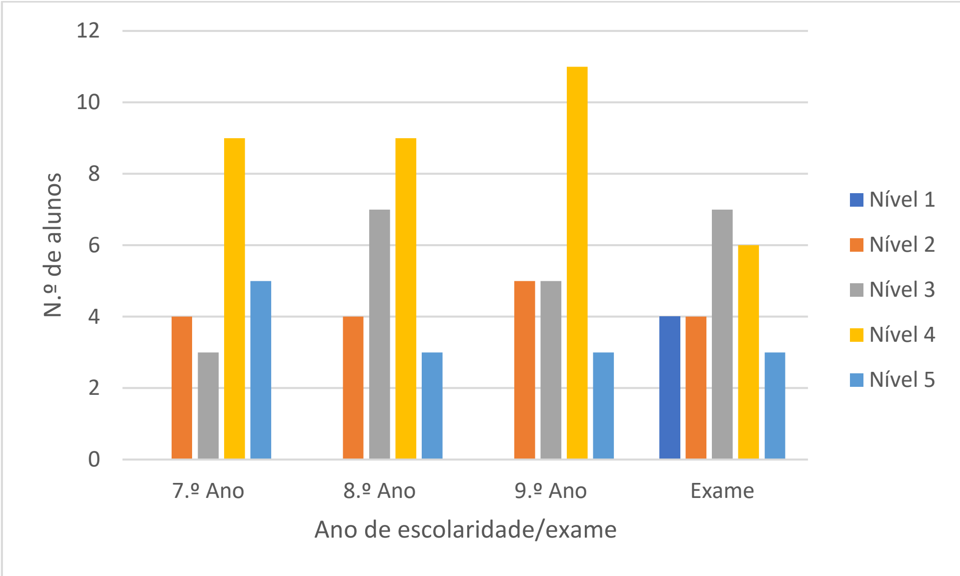


Figura 3.2 – Nível obtido a Matemática no final de cada ano do 3.º Ciclo e no Exame Nacional

A turma é bastante heterogénea, quer em termos de hábitos de trabalho, quer em termos de resultados. No entanto, não considerando um pequeno grupo de alunos, tem-se notado uma evolução positiva nos resultados obtidos ao longo do ano. Pela observação em aula, há a destacar duas alunas, que embora trabalhadoras, revelam muitas dificuldades e apresentam resultados muito baixos à disciplina.

Relativamente aos resultados do ano em curso verifica-se que nos dois primeiros períodos mais de metade dos alunos tem negativa à disciplina. No final do ano letivo 50% dos alunos da turma teve positiva à disciplina, como se pode ver na Figura 3.3. Tendo-se verificado que a classificação mais baixa em todos os períodos foi 2, enquanto a mais elevada foi 19 (18 no 1.º período; 19 no 2.º período; 19 no 3.º período). No entanto, há a destacar a evolução positiva da turma em relação à média das notas finais de cada período passando de 8,5 no 1.º período para 9,4 no último período, sendo que a mediana do mesmo conjunto de dados oscilou entre os 7,5 valores e os 9,5 valores.

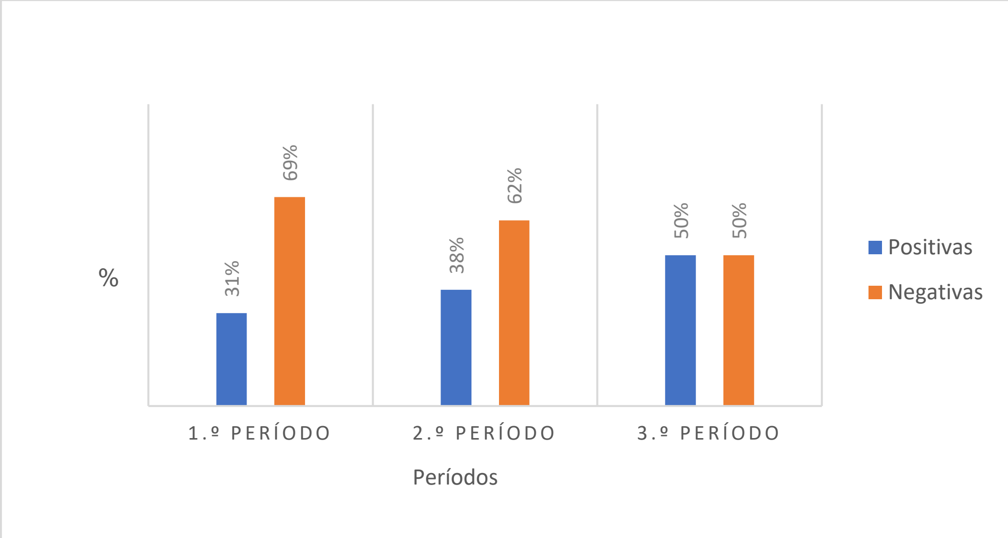


Figura 3.3 – Percentagem de positivas e negativas ao longo do ano letivo

Ao agrupar as classificações em cinco níveis (0-4, 5-9, 10-13, 14-16 e 17-20) destaca-se o decréscimo, ao longo do ano letivo, de alunos com classificações entre 5 e 9 valores passando de 15 alunos no 1.º período para 8 alunos no último período. No sentido inverso destaca-se o número de alunos com classificações entre 10 e 13 valores que subiu de apenas dois alunos no 1.º período para 8 alunos no fim do ano letivo. Também o número de alunos com classificações entre 17 e 20 valores neste parâmetro de avaliação subiu ao longo do ano letivo, passando de 1 aluno no 1.º período para 4 alunos no final do 3.º período. Estes dados encontram-se sintetizados na Figura 3.4.

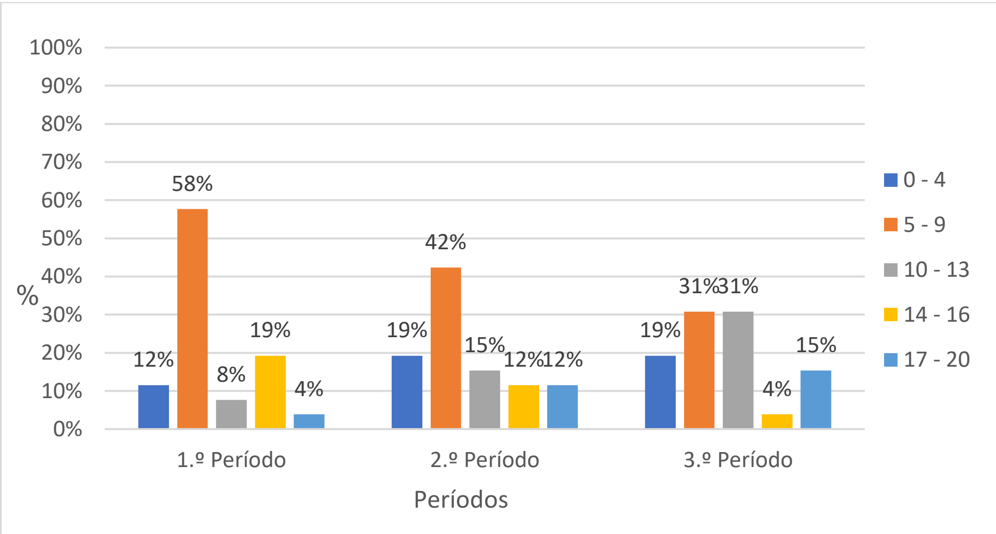


Figura 3.4 – Distribuição dos alunos por diversos níveis de classificação

No que diz respeito aos hábitos de trabalho em aula, na disciplina de Matemática A, verifica-se que nem todos os alunos efetuam, regularmente, registos no caderno. Ao serem questionados sobre a frequência com que fazem registo no caderno 81% dos alunos afirma que faz registo sempre ou quase sempre dos conteúdos da aula no caderno, sendo que 67% das raparigas o fazem sempre. De entre os rapazes, 29% admite que raramente faz registos no caderno durante as aulas.

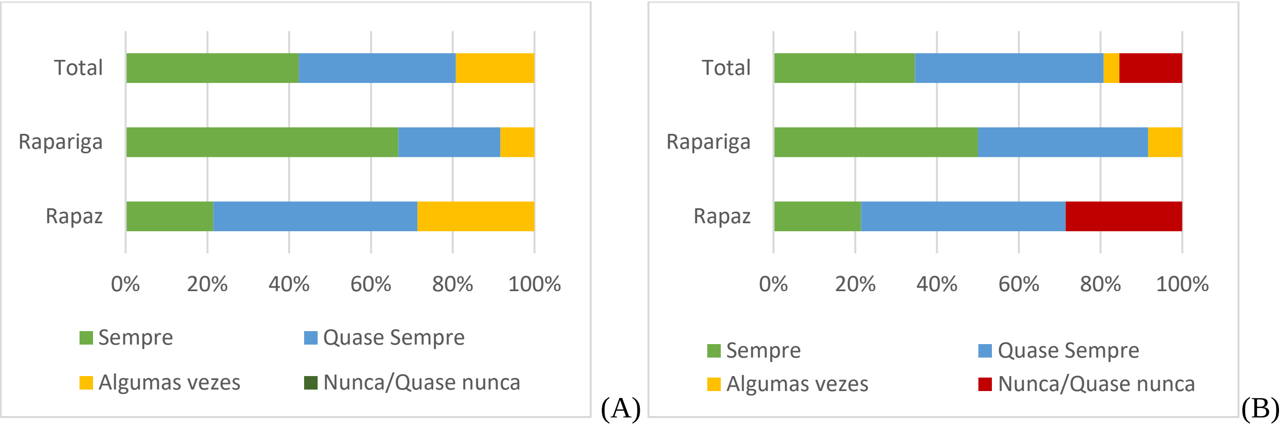


Figura 3.5 – Hábitos de trabalho dos alunos: registos no caderno diário em aula (A) e realização de trabalhos de casa (B)

Quando questionados quanto à frequência com que realizam os trabalhos de casa 35% dos alunos afirma fazê-lo sempre. Há a destacar que, quase todas as raparigas, 92%, realiza os trabalhos de casa sempre ou quase sempre. Cerca de 9% dos rapazes admite que nunca ou quase nunca realiza os trabalhos de casa. Os resultados relativos hábitos de trabalho em aula e em casa encontram-se sumariados na Figura 3.5.

Os resultados do questionário, quanto aos hábitos de estudo (Figura 3.6), revelam que 50% dos alunos estudam todos ou quase todos os dias. São as raparigas que estudam matemática com maior regularidade. Apenas duas raparigas afirmam estudar matemática unicamente na véspera dos testes, sendo cinco os rapazes que dão a mesma resposta. É de notar, no entanto, que 64% dos rapazes dizem estudar matemática pelo menos uma vez por semana. Relativamente à forma como estudam para a disciplina de Matemática, sozinhos ou em grupo, menos de um terço dos alunos admite que estuda em grupo. Destes, apenas 29% são raparigas. Há também a destacar, que cerca de 46% dos alunos afirma ter apoio à disciplina fora da escola.

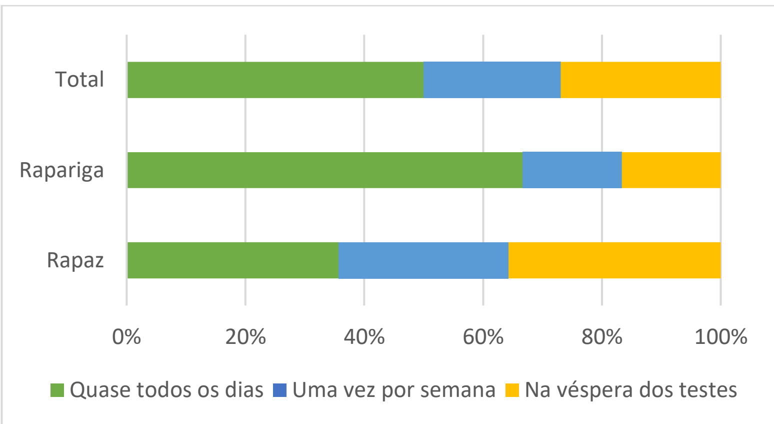


Figura 3.6 – Hábitos de estudo à disciplina de Matemática A

Relativamente ao desempenho da turma ao nível do 10.º ano, verifica-se que 10 alunos não transitaram para 11.º ano. Tal situação pode explicar a desmotivação e desinteresse que muitos alunos evidenciaram ao longo do 3.º período, bem como a sua postura em sala de aula.

No que concerne ao estatuto socioeconómico[5] dos alunos (Figura 3.7), verifica-se que quase metade está inserido em agregados familiares com estatuto socioeconómico menos privilegiado (EE, OI, Alpl e AEpl). Apenas 11% dos alunos provêm de famílias com estatuto socioeconómico mais elevado (EDL). Para três alunos não foi possível efetuar a classificação, por falta de informação.

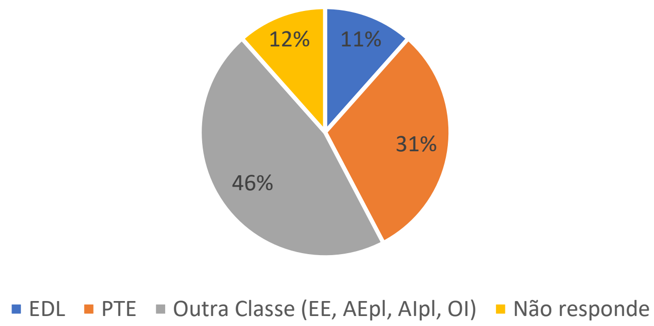


Figura 3.7 – Classificação socioeconómica dos agregados familiares dos alunos

Considerando apenas os pais (pai e mãe) cujas habilitações literárias são conhecidas (40 pais), há um pai que tem apenas o primeiro ciclo. Destaca-se a categoria relativa ao 3.º ciclo completo, com 37,5% dos pais. Metade dos pais possui no mínimo o 12.º ano do ensino secundário. Esta informação pode ser observada na Figura 3.8.

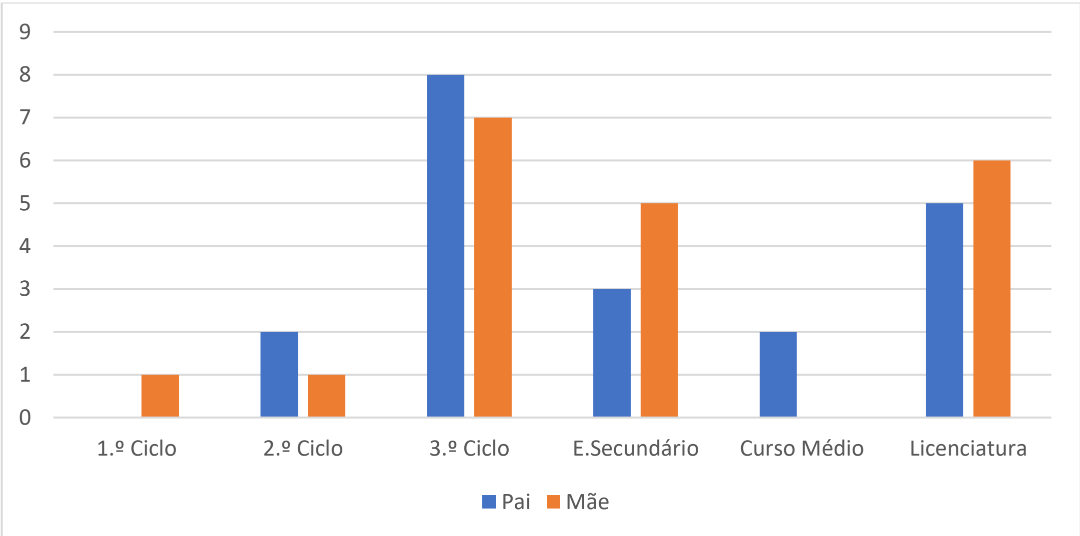


Figura 3.8 – Habilitações literárias dos pais dos alunos

[5] Para a classificação socioeconómica utilizou-se a Matriz de construção do indicador individual de classe e a Matriz de construção do indicador familiar de classe, em anexo. No caso de famílias monoparentais foi usada apenas a Matriz de construção do indicador individual de classe. Para efeitos de análise foram reunidas classes com perfis semelhantes (EE, OI, Alpl e AEpl) num único grupo designado por “Outra Classe”.

3.2. Caracterização da turma do 9.º ano

A turma do 9.º ano iniciou o ano letivo com 22 alunos. No início do 2.º período saiu um aluno e durante o mesmo período foram integrados na turma mais dois alunos oriundos do Brasil, perfazendo um total de 23 alunos. A turma é composta maioritariamente por rapazes. Em setembro de 2018, todos os alunos tinham idades compreendidas entre os 13 e os 16 anos. A distribuição dos alunos por sexo e idade pode ser observada abaixo, na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Número de alunos por idade e sexo

		Idade				Total
		13 anos	14 anos	15 anos	16 anos	
Sexo	Rapaz	1	9	3	2	15
	Rapariga	1	4	3	0	8
Total		2	13	6	2	23

A maioria dos alunos da turma apresenta grandes problemas ao nível do comportamento, motivação e empenho. Tal, reflete-se no trabalho desenvolvido quer em sala de aula, quer em casa e consequentemente nos resultados das avaliações. Relativamente às classificações (Figura 3.9) a percentagem de alunos com nota positiva veio a diminuir ao longo do ano. Enquanto no 1.º período 57% dos alunos obtiveram nível superior ou igual a 3, apenas 52% dos alunos o conseguiu no final do ano letivo. Há também a destacar que na turma nenhum aluno obteve nível 5 em nenhum dos períodos. No final do 3.º período houve dois alunos que terminaram o ano com nível 1 à disciplina de Matemática.

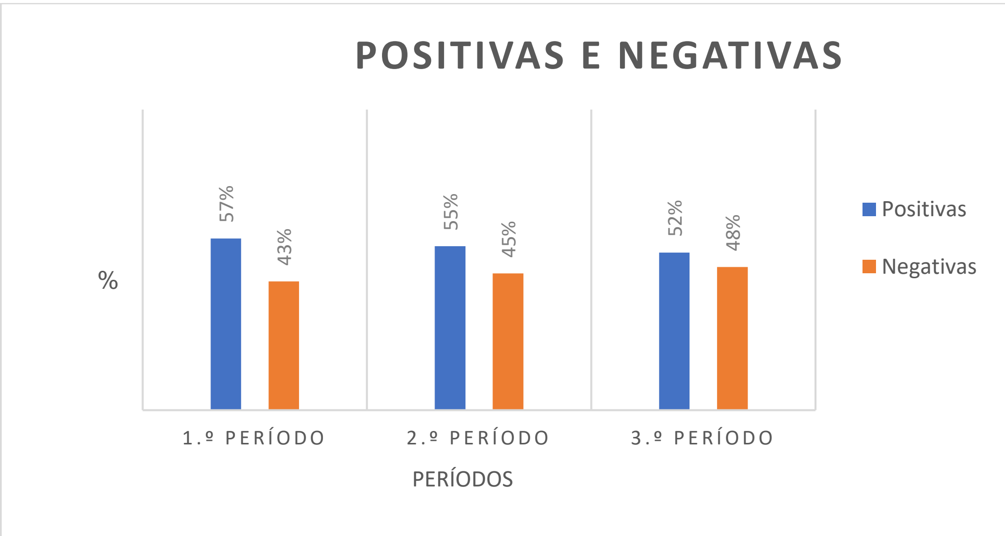


Figura 3.9 – Percentagem de positivas e negativas ao longo dos três períodos

4. Prática pedagógica supervisionada

Durante o estágio profissionalizante a professora estagiária lecionou várias aulas às turmas do 10.º e 9.º ano. Para além da lecionação das aulas, a professora estagiária assistiu à quase totalidade das aulas de Matemática A da turma do 10.º ano. Durante o ano letivo a professora estagiária assistiu a uma aula semanal da turma do 9.º ano. Sempre que durante as aulas, existiam momentos práticos de resolução de exercícios, a professora estagiária participou neles, circulando pela sala de aula e esclarecendo dúvidas sempre que solicitado. Para além das aulas assistidas, participou também em algumas aulas de acompanhamento ao estudo, à turma do 10.º ano.

4.1. Planos de aula

Os planos de aula elaborados, ao longo do ano letivo, em que decorreu o estágio pedagógico, apresentam todos a mesma estrutura e dizem respeito a aulas de dois tempos de cinquenta minutos cada. Em primeiro lugar são apresentadas e descritas as metas curriculares que pretendem ser abordadas na aula, bem como o sumário, os pré-requisitos e recursos necessários em cada uma das aulas. São ainda especificados os objetivos gerais e específicos e os aspetos a ter em consideração na avaliação. Em segundo lugar, são descritos detalhadamente os vários momentos a decorrer em sala de aula. Nestes planos são visíveis não só os conteúdos e a sequência adotada na sua lecionação, mas também as estratégias pensadas para a lecionação dos mesmos. Em algumas situações são apresentadas estratégias alternativas. Em todos os planos é ainda considerado o tempo previsto para cada momento considerado.

Os planos de aula foram estruturados atendendo às especificidades da turma. Na turma do 9.º ano, por ser uma turma mais complicada em termos de comportamento e de interesse pela matemática, foram utilizadas estratégias diversificadas e diferentes recursos em todas as aulas, com o objetivo de promover ambientes de aprendizagem mais motivadores e atrativos conducentes a uma maior atenção por parte dos alunos. Com a turma do 10.º ano a estratégia utilizada foi centrada essencialmente na interação entre alunos e professor, como forma de promover a participação dos alunos em aula. Em muitas situações, a sequência pensada inicialmente foi alterada, tentando chegar a um plano mais equilibrado e adaptado aos conteúdos e às características da turma.

Relativamente aos conteúdos teóricos foram consultados, para além do manual adotado, outros manuais e literatura de referência. No entanto, foi tido o cuidado de usar linguagem e notação, respeitando as metas curriculares e de acordo com a disponível nos manuais adotados. Houve uma preocupação constante, na utilização de exemplos de aplicação cuidadosamente selecionados para cada situação. Os exemplos e exercícios apresentados foram estruturados de modo a aumentar gradualmente a dificuldade. Sempre que possível, os exercícios foram realizados em conjunto com os alunos e em algumas situações, pelos próprios alunos no quadro. Em algumas situações, os exercícios serviram como motivação para a introdução de novos conteúdos, em outras foram apenas realizados após a lecionação dos mesmos. Por opção foram usados exemplos diferentes dos ilustrados no manual, para que os alunos tivessem oportunidade de contactar com uma maior diversidade de exemplos, com características e graus de dificuldade distintos.

Os primeiros dois tempos letivos lecionados em cada uma das turmas foram supervisionados apenas pela Professora Rosário Lopes, docente da turma e orientadora pedagógica. As restantes aulas foram assistidas pela Professora Rosário Lopes e pela Professora Doutora Maria Helena Almeida Santos, regente da unidade curricular Estágio Pedagógico.

4.2. Prática pedagógica na turma do 10.º ano

As aulas da turma do 10.º ano concentravam-se todas ao final da manhã ou princípio da tarde, num total de 6 tempos letivos distribuídos por três dias da semana. Nas aulas da tarde a maioria dos alunos da turma mostraram-se, durante todo o ano letivo, mais agitados e desconcentrados, tornando as aulas menos produtivas do que seria desejável para este ano de escolaridade.

Nesta turma foram lecionadas, ao longo do ano letivo, 7 aulas cada uma com dois blocos de 50 minutos. As aulas lecionadas versaram sobre os domínios da Álgebra, da Geometria Analítica e das Funções Reais de Variável Real. Em seguida é feita uma pequena reflexão de cada uma delas, desde a elaboração do plano de aula, passando pela lecionação da aula e análise das professoras supervisoras. Todas as reflexões, por apresentarem um caráter pessoal, são escritas na primeira pessoa.

4.2.1. Primeiro período

Durante o 1.º período foram lecionadas duas aulas, as quais são descritas em seguida.

4.2.1.1. Primeira aula

A primeira aula foi lecionada no dia 23 de outubro de 2018. Os conteúdos desta aula enquadraram-se no domínio da Álgebra (ALG10), nomeadamente a divisão inteira de polinómios

- *O plano de aula*

Ao elaborar o plano de aula para lecionar a divisão inteira de polinómios várias foras as dúvidas que me foram surgindo. Logo para iniciar aula, comecei por pensar em introduzir a divisão de polinómios, fazendo referência a casos que os alunos já fazem intuitivamente. Por exemplo, quando dividem por uma constante $\left(e.g.: \frac{2x+2}{2} = x+1\right)$ passando ao caso em que o polinómio dividendo é divisível pelo polinómio divisor $\left(e.g.: \frac{x^2+2x}{x} = x+2, x \neq 0\right)$. Ao expor esta proposta de aula à professora coordenadora, verifiquei que esta talvez não fosse a melhor estratégia. A professora alertou-me que, para além de me estar a antecipar à matéria, o facto de ter de fazer referência ao domínio poderia criar confusão à maioria dos alunos. Acabei por optar por introduzir a divisão inteira de números naturais e em seguida passar à fórmula fundamental da álgebra, tal como descrevo mais abaixo. À medida que o plano de aula ia ganhando forma, outras questões foram ocorrendo, por exemplo, colocar exemplos práticos antes de conceitos teóricos ou vice-versa? Qual a melhor opção? Quais os melhores exemplos? Em muitas situações, os alunos revelaram grandes dificuldades de abstração. A professora orientadora, por diversas vezes, teve necessidade de alterar a abordagem aos novos conteúdos. Por diversas vezes, a estratégia de introduzir os conceitos começando com exemplos não resultou.

Olhando para o perfil da turma, pareceu-me mais adequado fazer a introdução de alguns conceitos teóricos antes da apresentação de exemplos, algo que aquando da lecionação da aula se revelou menos apropriado. Também, a forma como pensei introduzir a divisão inteira de polinómios, teve alterações da estratégia prevista inicialmente. Por exemplo, para chegar aos sucessivos monómios do polinómio quociente pensei que, caso fosse necessário, e embora eu não goste da estratégia, sugerir a divisão do monómio de maior grau do polinómio dividendo pelo polinómio divisor (esta estratégia é usada em vários manuais). Conversando com a professora Rosário, e tendo concordado que matematicamente é uma situação delicada, passível de promover alguma falta de rigor científico, acabei por abandonar essa estratégia.

Todos os exemplos e exercícios foram cuidadosamente escolhidos de modo a serem o mais diversificados possível e com objetivos distintos. A sua sequência foi pensada de modo a testar a aprendizagem dos alunos, bem como a evolução evidenciada na resolução dos mesmos. Os primeiros exercícios são diretos e depois a sequência evolui para exercícios com maior grau de complexidade. Alguns dos exercícios eram semelhantes no objetivo, mas recorriam a diferentes tipos de linguagem, para que os alunos se pudessem familiarizar com expressões equivalentes. Também, na seleção de exercícios foram considerados alguns que fomentassem situações de erros usuais, de forma a ser possível corrigi-los. Os exercícios foram compilados numa ficha para poderem ser disponibilizados aos alunos.

- *A aula*

A aula começou à hora prevista. Embora, não estivesse inicialmente previsto que fosse eu a iniciar a aula com o esclarecimento de dúvidas relativas ao trabalho para casa, tal acabou por acontecer. Previa-se que a turma apresentasse algumas dúvidas e a professora Rosário Lopes sugeriu que fosse eu a efetuar esses esclarecimentos. Os exercícios consistiam na determinação do grau dos polinómios obtidos pelo produto e pela soma de dois polinómios. Mesmo após a resolução apresentada por mim, algum dos alunos continuaram a revelar dificuldades no exercício. Então, utilizei uma abordagem diferente para que todos conseguissem entender a resolução. Pareceu-me que todos ficaram elucidados relativamente às questões colocadas. Tal facto foi reforçado, no final da aula, pela professora orientadora, que considerou os meus esclarecimentos adequados cumprindo os objetivos que se pretendiam relativamente ao esclarecimento das dúvidas aos alunos.

Após a correção dos trabalhos de casa, e não havendo mais dúvidas, iniciei a revisão da divisão inteira de números naturais, tal como tinha pensado ser mais apropriado. Os alunos mostraram-se desatentos, revelando, alguns deles, desinteresse pelo que explicava, provavelmente por pensarem não fazer sentido rever conteúdos lecionados no primeiro ciclo. Perante a postura da turma, a professora Rosário acabou por intervir, chamando-os à razão.

De seguida indiquei em que consistia a divisão inteira de polinómios. Neste ponto devia ter clarificado a unicidade dos polinómios quociente e resto (não me consegui aperceber das dificuldades apresentada pelos alunos).

Pelo facto de estarmos perto do final do primeiro tempo, e não me parecendo correto iniciar o exemplo da divisão de polinómios, e ter de interromper a meio, aproveitei uma questão colocada por uma aluna. Alterei o plano de aula, e antecipei a noção de divisão exata de polinómios, enfatizando o facto de, neste caso, o polinómio dividendo ser divisível pelo polinómio divisor.

Refletindo sobre a forma como tinha decorrido o primeiro tempo, apercebi-me que provavelmente teria suscitado menos dúvidas, no que diz respeito à unicidade dos polinómios quociente e resto, se tivesse optado por dar um exemplo concreto de divisão de polinómios, antes de o fazer teoricamente.

Por sugestão da professora Rosário, iniciei o segundo tempo com um exemplo cuja divisão era exata, dando assim continuidade ao conteúdo referido no final da 1.ª aula e só depois passei ao exemplo que tinha previsto no plano. Na resolução dos exemplos surgiram inúmeras dúvidas, muitas delas consequência da constante distração de muitos alunos. Os alunos não percebiam porque se somava o simétrico, do polinómio obtido da multiplicação do monómio encontrado para o quociente pelo polinómio divisor, ao polinómio dividendo. Parece-me que tal dúvida surge exatamente por não terem prestado a devida atenção na primeira parte da aula. A professora Rosário acabou por intervir, mostrando de outra forma, que o que se estava a fazer era subtrair ao dividendo o polinómio que se obtinha da multiplicação do monómio encontrado pelo polinómio divisor. O facto de terem surgido inúmeras dúvidas, e de ter tentado esclarecê-las todas, fez com que o ritmo da aula fosse muito baixo, levando a que a grande maioria dos alunos só resolvesse um dos exercícios que tinha previsto para realizarem em sala de aula (apenas foi resolvido no quadro, por uma aluna, um exercício). Ao circular pela sala, enquanto os alunos resolviam o exercício, deparei-me com dificuldades apresentadas por quase todos os alunos. O facto de no primeiro exercício, o divisor ser um polinómio incompleto levou grande parte dos alunos a não “alinhar” os monómios semelhantes, originando erros na soma e consequentemente, no polinómio assumido como o novo dividendo.

Estando na hora de saída, mandei os alunos sair, tendo-me esquecido de mandar trabalho para casa, como tinha planeado. A professora Rosário acabou por fazê-lo por mim.

No final da aula a professora Rosário referiu que devia ter imposto maior ritmo à aula, chamando-os mais vezes à atenção, relativamente ao comportamento. Nesse caso, talvez tivesse sido possível a realização de um maior número de exercícios por parte dos alunos. Esta foi primeira aula que lecionei ao 10.º B, e não sendo a professora da turma, não me senti à vontade para intervir mais frequentemente, no que respeita às atitudes de alguns alunos. Além deste facto, os alunos também estavam mais agitados que o costume. Esta aula é usualmente a mais agitada da semana, por ser a última do dia, decorre entre as 15:15h e as 17:10h. Também, terá contribuído para esta situação o facto de os alunos terem feito teste de outra disciplina, nos tempos letivos imediatamente anteriores. Espero, nas aulas futuras, conseguir corrigir este aspeto impondo maior disciplina em sala de aula.

Relativamente à linguagem a professora referiu que, embora tenha escrito sempre corretamente, na maioria das vezes me referi aos polinómios $A(x)$ e $B(x)$ apenas como polinómios A e B. Referiu ainda que, para facilidade de linguagem, até o poderia ter feito, uma vez que estava a trabalhar sempre com polinómios na mesma variável, x ,mas primeiro deveria ter informado os alunos que o iria fazer.

4.2.1.2. Segunda aula

A segunda aula lecionada pela professora estagiária decorreu quase no final do 1.º período, a 11 de dezembro de 2018. Os conteúdos desta aula, equação reduzida da circunferência, incluem-se no domínio da Geometria Analítica (GA 10).

- *O plano de aula*

O plano de aula sobre circunferência e círculo sofreu várias alterações desde que o comecei a delinear. Para além de possíveis estratégias a ter em conta, também a sequência com que os conteúdos deveriam ser dados foram questionadas por mim, várias vezes. Começar por introduzir os conceitos através de um exemplo ou lecionar os conteúdos teóricos inicialmente? Lecionar os conteúdos relativos à circunferência e só depois lecionar os conteúdos relativos ao círculo, ou lecionar os conteúdos em paralelo?

Após algumas reflexões e troca de ideias com a professora coordenadora, o plano de aula começou a ganhar forma. Iniciar com um exemplo concreto, após a definição de circunferência como lugar geométrico, talvez fosse o mais acertado. A aplicação da definição de circunferência como lugar geométrico a um caso concreto e só depois passar à generalização do resultado, pareceu-me que seria compreendido mais facilmente pelos alunos do que o contrário.

Relativamente à estrutura da aula quanto aos conteúdos, comecei por pensar em iniciar com os conteúdos relativos à circunferência passando posteriormente ao círculo. Ao fazê-lo tive a noção que não teria tempo para lecionar tudo nos dois tempos de aula previstos. No entanto, achei que poderia ganhar algum tempo se abordasse circunferência e círculo em simultâneo, o que levou a que outras questões se levantassem. Será que esta nova estratégia funcionaria com estes alunos? Será que não iria criar confusão? Provavelmente seria melhor demorar um pouco mais de tempo, mas ter a garantia que os conteúdos seriam compreendidos e assimilados pela maioria deles. Optei então, por manter a estrutura inicialmente prevista e que a professora orientadora confirmou poder ser mais adequado.

Relativamente à exposição de conteúdos, pensei se seria melhor fazer toda a exposição no quadro ou se deveria utilizar um ficheiro *PowerPoint* e projetar os resultados. A opção foi utilizar apenas o quadro, pois poderia proporcionar maior intervenção dos alunos. Utilizei um ficheiro *PowerPoint* apenas para projetar o enunciado dos exercícios, que preparei para os alunos resolverem.

Os exercícios que considerei para a aula foram todos adaptados aos conteúdos abordados nas mesmas, embora todos tenham sido selecionados de outros manuais que não o adotado. O manual adotado tinha poucos exercícios de aplicação pelo que decidi não os trabalhar em aula e deixar para os alunos os pudessem realizar em casa. Procurei escolher e adaptar exercícios que fossem simples e de aplicação direta. No primeiro exercício proposto, tentei que embora em todas as alíneas fosse solicitada a equação da circunferência, a resposta fosse dada de forma diferente. Os 3 exercícios seguintes são também eles muito diretos e direcionados para o que se previa lecionar em aula. Apenas os dois últimos exercícios têm um grau de dificuldade mais elevado, mas dentro do expectável para alunos do 10.º ano.

- *A aula*

A aula teve início cerca de 10 minutos mais tarde, devido a um atraso na aula da disciplina anterior.

Comecei a aula tal como previsto no plano, solicitando aos alunos que participassem, através de algumas questões que fui colocando. No primeiro tempo, os alunos mostraram-se, no geral, participativos e atentos. Foram questionando sempre que lhes surgia alguma dúvida; as quais tentei responder de modo a que ficassem elucidados.

Durante a resolução do primeiro exercício, os alunos revelaram algumas dificuldades que se prendiam essencialmente com lacunas em conteúdos dados em aulas anteriores, dificuldades em interpretar o enunciado, em entender a notação usada e também com a falta de autonomia e dificuldade de raciocínio, que muitos deles apresentam.

Os exercícios foram resolvidos no quadro por vários alunos, à exceção de uma alínea, onde a maioria dos alunos mostrou ter dúvidas. Essa parte foi, por opção, resolvida por mim para explicar a toda a turma e chamar a atenção que, na maioria das vezes, esquematizar o problema ajuda à sua resolução. No caso concreto, esquematizar o problema era suficiente para, rapidamente, o entenderem e resolverem a questão que era colocada. Todos os exercícios resolvidos pelos alunos foram por mim verificados e em alguns casos foi pedido aos alunos para explicarem a sua resolução aos colegas.

Após a correção do primeiro exercício, a aula prosseguiu, como planeado. Nesta fase, alguns alunos já não se mostraram tão atentos. O conteúdo lecionado nesta fase deu origem a várias dúvidas levando algum tempo até que todos o entendessem. Também, originou respostas corretas por parte de alguns alunos, que me surpreenderam pela positiva.

Terminado o conteúdo e faltando cerca de dois minutos para o final da aula optei por não fazer nenhum exemplo e marcar os trabalhos para casa, dando de seguida a aula por terminada.

No final da aula, senti que a mesma não tinha corrido como tinha pensado e preparado. Tinha noção que haviam ocorrido falhas e não estava satisfeita comigo própria.

A professora Rosário Lopes e a Professora Doutora Helena Santos tinham vários comentários a fazer, que a seguir se descrevem:

- Logo no início da aula quando perguntei aos alunos a definição de circunferência como lugar geométrico, uma aluna respondeu corretamente, mas muito baixo. Eu aproveitei a resposta para avançar, mas devia ter pedido à aluna para repetir mais alto, para toda a turma.

- Ao escrever no quadro a definição mencionada acima um dos alunos não a percebeu. Fui falando em vários pontos da circunferência, referindo que a distância de todos ao centro é igual à medida do raio. Podia ter realçado que essa é uma propriedade comum a todos os pontos da circunferência. Por exemplo, poderia tê-lo questionado, obrigando o próprio aluno a encontrar a resposta à sua dúvida. Esta opção também seria mais eficaz para obter a condição da circunferência.

- Sempre que defini uma circunferência nunca explicitei que $P(x, y)$ é um ponto qualquer da circunferência, que obviamente deveria ter feito. Apenas o disse oralmente e coloquei no "desenho".

- Em determinado momento, disse "já temos a condição que define a nossa equação" quando deveria ter dito "já temos a condição que define a nossa circunferência".

- Optei por, na equação reduzida da circunferência, deixar no segundo membro o valor do raio elevado ao quadrado. Deveria ter feito os cálculos e apresentado o resultado final, chamando a atenção para a importância de expressar o 2.º membro desta forma (r^2) nos casos em que não está, para que não ocorram erros na determinação da medida do raio. Consequentemente, os alunos fizeram o mesmo na resolução dos exercícios. Na realidade os cálculos só foram feitos na alínea a.iii e em sequência de uma dúvida de um aluno.

- Quando me quis referir ao resultado "Se a e b são números reais não negativos $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$" para justificar a equivalência das seguintes equações "$\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r \overset{*}{\Leftrightarrow}$ $\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left(\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}\right)^2 = r^2$" disse que o poderíamos fazer porque estávamos a tralhar com quantidades positivas. Na realidade estamos a trabalhar com distâncias, mas era importante ter realçado que x e y assumem quaisquer valores.

- Relativamente à condição $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$ que coloquei no quadro e pedi aos alunos para identificar o lugar geométrico, surgiram algumas dúvidas quer em relação às coordenadas do centro, quer à medida do raio. Para tentar que percebessem qual a medida do raio perguntei "qual o valor que elevado ao quadrado dá 3?" enquanto o correto seria perguntar "qual o valor positivo que elevado ao quadrado dá 3?". No mesmo exemplo, um aluno disse várias vezes que as coordenadas do centro eram 1 e -4; devia tê-lo corrigido (as coordenadas do centro são (1, -4)). Como neste exemplo, o raio era $\sqrt{3}$, um aluno disse que então no primeiro exemplo o raio era $\sqrt{5}$; nesta situação podia ter chamado a atenção que no 1.º exemplo tínhamos a equação $\sqrt{(x - 2)^2 + (y - 3)^2} = 5$. Ao elevar ambos os membros ao quadrado, faz aparecer 25 no segundo membro, ou seja, o raio era 5 e não $\sqrt{5}$.

- Devia ter insistido muito mais na definição de circunferência como lugar geométrico, mesmo para explicar algumas dúvidas que surgiram por parte dos alunos. Em alguns casos, ficou a sensação de mecanização de resultados.

- Na resolução da alínea b) do primeiro exercício uma parte dos alunos não acompanhou as explicações dos colegas, quando perguntei como poderiam resolver a questão, e estes disseram que bastava substituir um ponto na equação e ver se esta era verificada, ou não. Devia ter aproveitado alguns dos comentários para sugerir outra possível resolução (determinar a distância do ponto ao centro e ver se é igual ao raio). Também, a resolução feita no quadro, por um dos alunos, foi estranha, não se percebendo muito bem se estava a fazer uma verificação ou a calcular a distância do ponto ao centro da circunferência.

- No final da aula, mesmo faltando pouco tempo para terminar, devia ter feito um exemplo de aplicação do último conteúdo lecionado.

4.2.2. Segundo período

No 2.º período foram lecionadas, pela professora estagiária, três aulas consecutivas. Os conteúdos lecionados nas aulas descritas em seguida, enquadraram-se no domínio de funções reais de variável real (FRVR 10).

4.2.2.1. Terceira aula

A terceira aula foi lecionada no dia 18 de fevereiro de 2019. Foi uma aula sobre generalidades de funções, a primeira no domínio de funções reais de variáveis reais (r.v.r.), e onde foram considerados os descritores 1.1, 1.2 e 2.2 das metas curriculares.

- *O plano de aula*

O plano para a terceira aula lecionada coincidia com a introdução do tópico programático de funções reais de variável real. Assim assumia-se a necessidade de rever alguns conteúdos já lecionados em anos anteriores, nomeadamente a definição de função, domínio e contradomínio de uma função, entre outros.

Ao refletir sobre o modo como deveria rever estes conteúdos, muitas questões se levantaram. Embora achasse que deveria iniciar a aula com a utilização de um exemplo, essa opção tornou-se numa tarefa não muito simples de ultrapassar. Queria um exemplo simples, mas que em simultâneo motivasse os alunos e que criasse alguma curiosidade. Estando numa semana em que havia jogos para a liga dos campeões, acabei por construir um exemplo que consistia no preenchimento de vários boletins de totobola, usando os jogos da semana. Cada boletim seria representado através de um diagrama de setas (ou diagrama sagital). Esse exemplo, permitiria explorar várias correspondências, destacando as características de cada uma delas e permitindo, que com a interação dos alunos, se identificassem as que eram funções e as que não o eram. Permitiria também explorar, de forma simples, as definições de objeto, imagem de um objeto, domínio, conjunto de chegada e contradomínio de uma função.

Também, o modo como introduzir o produto cartesiano de conjuntos, me levantou algumas questões em termos de concretização do plano de aula. Inicialmente, pensei em introduzir a definição exemplificando posteriormente. No entanto, decidi introduzir através de um exemplo, para facilitar a interpretação por parte dos alunos. Já para definir o gráfico de uma função, optei por não iniciar com um exemplo. Neste caso, pareceu-me que seria melhor introduzir os conceitos teóricos para, em seguida, exemplificar e introduzir a representação dos pares ordenados num referencial cartesiano, no caso de se tratar de variáveis numéricas.

Os exemplos e exercícios selecionados para aplicação dos conteúdos foi também um ponto de atenção chave na planificação. É importante escolher exemplos que todos os alunos consigam entender, sempre que se lecionam conteúdos novos, para que não fiquem desmotivados e consigam acompanhar a aula. Assim, procurei escolher, adaptar e criar exercícios que fossem simples e de aplicação direta no início, aumentando o grau de dificuldade à medida que iam avançando. Também, tentei escolher exercícios que permitissem aplicar outros conteúdos já lecionados durante o ano letivo e outros não tão diretos, mas que obrigassem os alunos a pensar e a relacionar diferentes matérias.

Para apoio da aula, foi ainda criado um ficheiro PowerPoint com os enunciados dos exemplos e dos exercícios.

- *A aula*

A aula começou à hora prevista e foi seguido o plano de aula elaborado. No primeiro tempo, projetei o primeiro exemplo e fui trabalhando com os alunos os conteúdos da aula. Os alunos mostraram-se, no geral, participativos, mas alguns deles evidenciaram algumas dificuldades que não eram esperadas. Por exemplo mostraram alguma confusão entre conjunto de chegada e contradomínio. Foram ainda resolvidos e corrigidos exercícios de aplicação. A segunda aula iniciou com o produto cartesiano de conjuntos. Foi considerado um exemplo diferente do que tinha considerado no plano de aula, por sugestão das Professoras Maria Helena Santos e Rosário Lopes. Esta alteração consistia em considerar um dos conjuntos que não fosse numérico. Após exploração do exemplo e definido o produto cartesiano de conjuntos foram abordados vários exemplos, tendo acabado por considerar um outro que não estava no plano de aula, com dois conjuntos definidos por intervalos de números reais. A aula terminou, após a realização e correção dos exercícios aplicados a este tópico programático e indicação dos trabalhos para casa. Todos os exercícios foram resolvidos no quadro por alunos.

No final da aula foram feitas algumas críticas construtivas e também alguns elogios à forma como tinha decorrido a aula.

- Logo no início da aula, quando introduzi o primeiro exemplo (do totobola) falei, de forma pouco precisa, de correspondência entre elementos de um conjunto e de outro conjunto.

- Ao explorar as várias correspondências, no mesmo exemplo, fi-lo oralmente, mas devia ter escrito no quadro as razões pelas quais o boletim da Matilde e do Afonso não eram funções. Nomeadamente, no boletim da Matilde existia um elemento com dois correspondentes e no boletim do Afonso existia um jogo para o qual não existia aposta.

- No quadro escrevi Domínio: *A*; Conjunto de Chegada: *B*. Nessa altura um dos alunos disse que *B* era o contradomínio. Deveria ter aproveitado um dos boletins, que se tinha verificado ser, uma função para verificar que *B* não era igual ao contradomínio.

- Ao perguntar o que era o conjunto das imagens, um aluno disse ser *B*. Aqui usei, e bem, o exemplo da aposta. Se o tivesse usado mais cedo, provavelmente os alunos não teriam dito que o conjunto das imagens era o conjunto *B*.

- Defini o contradomínio de uma função, como conjunto das imagens (de objetos de *A*); acrescentei e bem ao que tinha no plano de aula, (de objetos de *A*), mas não tinha necessidade de utilizar parênteses tal como o fiz. Disse ainda que o contradomínio se representa por D'_f ou CD_f, mas não fiz referência à representação por $f(A)$, vindo só mais tarde a referi-lo.

- Ao utilizar o exemplo para identificar os objetos, as imagens, domínio da função, conjunto de chegada e contradomínio, projetei o enunciado e apenas resolvi identificando cada uma das alíneas com a respetiva letra. Como o exemplo foi projetado e os alunos não tinham o enunciado, deveria ter escrito no quadro o que era pedido em cada alínea, de modo a que a resolução ficasse mais clara.

- No mesmo exemplo foi bom ter colocado as questões "Quais são os objetos?" e "Indique o domínio da função", pois põe em destaque o facto do domínio ser um conjunto.

- Ainda no mesmo exemplo, alguns alunos continuaram a confundir conjunto de chegada com contradomínio de uma função. Indicaram o contradomínio como conjunto de chegada. Neste caso, deveria ter destacado que o contradomínio está contido ou é igual ao conjunto de chegada. Perguntei, no entanto, a um aluno se tinha percebido a diferença entre conjunto de chegada e contradomínio. Segundo as professoras deveria ter realçado ainda mais as diferenças.

- No que diz respeito ao exercício 1, a forma como estava feita a alínea b) dava resposta à alínea a), podendo levar à resposta correta sem se perceber o porquê. Deveria tê-la feita de forma a que tal não ocorresse. Na resolução da alínea a) apenas ficou escrito *f* não é função e g é função. Seria melhor que também ficasse escrita a justificação. Mais tarde disse que os alunos deviam justificar. Alguns fizeram-no oralmente, mas com falhas na linguagem; por exemplo, um disse que *f* não era função porque um objeto tinha mais do que uma imagem. Oralmente, eu disse-o de uma forma correta, mas não corrigi o aluno diretamente. No fim acabei por reforçar o que os alunos disseram "que um elemento tinha duas imagens".

- Na segunda parte da aula iniciei com o produto cartesiano de conjuntos, seguindo as sugestões dadas durante o intervalo. Correu bem; usei o exemplo $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{a, b\}$. Usei de forma adequada a colaboração dos alunos para determinar $A \times B$ e $B \times A$ e só no final defini, corretamente $A \times B$.

- Falei de cardinal de $A \times B$, mas não escrevi. Podia ter escrito $\#(A \times B) = \#A \times \#B$.

- Foi bom ter acrescentado um exemplo aos previstos no plano com $A =]1,3]$ e $B = [1,2]$. Na representação gráfica a professora Rosário achou que deveria ter evidenciado que o intervalo]1, 3] era aberto em 1, usando bolas abertas e não somente um segmento de reta a tracejado. Também, referiu que se fosse ela teria escrito primeiro $A \times B = \{(a, b): a \in]1,3] \wedge b \in [1,2]\}$ e só depois $\{(a, b): 1 < a \leq 3 \wedge 1 \leq b \leq 2\}$.

- No último exercício em vez de ter escrito por extenso "A tem 3 elementos" e "B tem 2 elementos" poderia ter escrito $\#A = 3$ e $\#B = 2$.

4.2.2.2. Quarta aula

A quarta aula foi lecionada no dia 19 de fevereiro de 2019. Na continuação da aula anterior, esta incidiu essencialmente sobre o gráfico de uma função de A em B e na interpretação de gráficos cartesianos de funções numéricas.

- *O plano de aula*

O plano para a quarta aula lecionada teve de sofrer alguns ajustes, pelo facto de não ter sido possível lecionar todos os conteúdos previstos para a aula três. Na realidade, o plano de aula tinha sido elaborado de forma sequencial e não tendo sido possível lecionar todos os conteúdos previstos para a aula anterior, nesta aula apenas foi necessário pensar na melhor forma de dar continuidade ao plano da aula anterior. Tendo em conta o ritmo da aula de dia 18/02/2019, optei por considerar neste plano de aula a introdução do gráfico de uma função (que não fora lecionado na terceira aula, por falta de tempo), a representação de funções numéricas de variável numérica num referencial cartesiano, definição de funções reais de variável real (r.v.r.), revisão das diferentes formas de representar uma função, resolução de exercícios de aplicação e domínios de funções r.v.r..

Tal como tinha pensado fazer, aquando da elaboração do plano da aula anterior, planeei introduzir teoricamente o conceito de gráfico de uma função e só depois efetuar um exemplo de aplicação. Esse exemplo, considerando variáveis numéricas, serviria para, em seguida, exemplificar e introduzir a representação dos pares ordenados num referencial cartesiano. Para além do exemplo inicial, pareceu-me também adequado, considerar um exemplo em que fosse possível apresentar algumas convenções que se usam nas representações geométricas dos gráficos de funções. Convenções essas, que são importantes para o estudo de uma função a partir da sua representação gráfica, nomeadamente no que diz respeito ao domínio e ao contradomínio. As maiores dúvidas de como dar continuidade ao plano de aula surgiram-me após este exemplo. O manual sugeria que continuasse com generalidade sobre funções, nomeadamente igualdade de funções, restrições de um função e imagem de um conjunto por uma função. Mas, para mim fazia sentido definir, de imediato, função real de variável real, gráfico cartesiano de uma função r.v.r. e consequentemente, determinar o domínio de uma função r.v.r. A opção foi tomada, depois de muito refletir e de ter trocado opiniões com a professora Rosário. Escolhi seguir o que para mim parecia mais natural, definir função r.v.r. e explorar o estudo de uma função r.v.r. a partir da sua representação gráfica. Deste modo, optei por introduzir no plano um momento de resolução de exercícios que permitisse aos alunos aplicarem os conteúdos lecionados durante a aula. Após este momento, e caso o tempo de aula o permitisse, pareceu-me adequado caracterizar uma função r.v.r. e como tal, o domínio de uma função r.v.r. No plano foi ainda considerado um momento de resolução de exercícios, para determinação de domínios de funções r.v.r.

Um dos aspetos mais importantes e delicados aquando da elaboração do plano de aula é a escolha dos exemplos e dos exercícios para aplicação dos conteúdos. Encontrar exercícios que sejam adaptados aos conteúdos e também aos alunos em causa, nem sempre é uma tarefa simples. Tal como em aulas anteriores, consultei vários manuais de forma a tentar selecionar e adaptar exercícios cuja abordagem fosse um pouco diferente da que é feita no manual adotado, que pudessem servir de estímulos aos alunos e que em simultâneo os obrigasse a pensar. Contudo, procurei sempre encontrar exemplos e exercícios que fossem simples e adequados aos conteúdos lecionados em aula. No que diz respeito à determinação de domínios de funções r.v.r., embora o enunciado não divergisse muito do manual permitiu considerar diferentes funções r.v.r.

Também foi criado um ficheiro PowerPoint com os enunciados dos exemplos e dos exercícios.

- *A aula*

A aula começou à hora prevista com a correção do trabalho de casa. Foi importante fazer a correção, pois percecionei que alguns alunos, para responder à primeira alínea do exercício necessitaram de fazer a segunda alínea em primeiro lugar, o que não era de todo suposto, nem necessário. Ao contrário do que é habitual, alterei de imediato o que tinha previsto fazer no plano de aula e utilizei o exercício do trabalho de casa para rever o conceito de gráfico de uma função, G_f, definindo o conceito apenas posteriormente. A partir daí a aula seguiu o plano de aula elaborado, embora num dos exemplos tivesse explorado mais, do que tinha previsto, o estudo de funções a partir da sua representação gráfica. Para além da determinação do domínio e contradomínio foram também indicadas imagens de alguns objetos e encontrados os conjuntos solução para algumas condições do tipo $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$. Os alunos mostraram mais dificuldades do que as esperadas, sendo necessário insistir, e gastar mais tempo que o previsto, no exemplo. No início do segundo tempo foi necessário retomar o exemplo. Devido ao andamento da aula, optei por não seguir o plano que tinha elaborado, passando de imediato à resolução e correção de exercícios. Não havendo tempo para lecionar mais conteúdos, indiquei os trabalhos de casa e dei a aula por terminada.

Finalizada a aula havia algumas críticas ao modo como tinha decorrido a aula.

- A primeira critica dizia respeito ao modo como introduzi o conceito de gráfico de uma função. Segundo a professora Rosário Lopes podia ter realçado que se tratava da revisão de um conceito dado no 3.º ciclo e eu parecia que estava a dá-lo pela primeira vez. Também o indiquei como tratando-se de uma propriedade, em vez de uma definição.

- Para explicar que um conjunto $E \subset A \times B$ pode não ser o gráfico de uma função, atrapalhei-me um pouco e disse algo do género "não há um único par ordenado com a mesma abcissa", dando o exemplo que, caso os pares ordenados (1, 3) e (1, -1) pertençam ao conjunto $E \subset A \times B$ então E não é o gráfico da função *f*.

- Alguns alunos insistiram muito sobre como saber se um conjunto $E \subset A \times B$ é gráfico de *f*. Eu deveria ter realçado, e não o fiz, a condição necessária e suficiente (Um conjunto $G \subset A \times B$ é o gráfico de uma função de *A* em *B* quando, e apenas quando, para todo o $a \in A$ existir um e somente um, elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$).

- Devia ter clarificado o significado da condição "para todo o $a \in A$ existir um e somente um, elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$"; os alunos ignoraram completamente.

- Deveria também insistir mais no facto de que o gráfico de uma função é um conjunto.

- Realcei bem que $G_f = \{(x, y): x \in A \ \wedge y = f(x) \in B\}$ e que quando a função é representada pelo seu gráfico cartesiano é necessário conhecer o conjunto de partida e o conjunto de chegada para saber se se trata de uma função de *A* em *B*.

- Fiz bem ter pedido as imagens de alguns objetos e ter resolvido condições do tipo $f(x) < 0$ e $f(x) \geq 0$, no entanto, podia ter solicitado aos alunos que indicassem o(s) objeto(s) para uma dada imagem.

- Quando resolvi a condição $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1,2[$, para explicar que $f(1) = 0$ fi-lo de uma forma estranha.

- No exercício 3 a explicação de que os conjuntos *E* e *F* eram gráficos de uma fuma função e que o conjunto *G* não era gráfico de uma função, foi considerada muito estranha. Verifiquei primeiro se estavam contidos em $A \times B$ e só depois que todos os elementos do conjunto *A* tinham um e um só correspondente no conjunto *B*. Não era necessário usar $A \times B$, era mais importante focar se cada elemento do conjunto verificava a condição e se todos os elementos da A tinham correspondente diferente ou não.

- No caso do conjunto *G*, um dos alunos foi resolver ao quadro e construiu uma tabela para encontrar todos os pares ordenados que pertenciam a $A \times B$. Tal não fazia falta.

- Enfatizei demais o facto de $G \in A \times B$, dando menos relevância à condição "quando, e apenas quando, para todo o $a \in A$ existir um e somente um, elemento $b \in B$ tal que $(a, b) \in G$", o que não deveria ter acontecido.

Nesta aula os alunos estiveram muito agitados e tive alguma dificuldade em me impor. Este é um aspeto que considero complicado, porque não consigo assumir a turma como completamente minha. Embora às vezes sinta vontade de chamar mais a atenção dos alunos, não me sinto muito bem ao fazê-lo. Senti que o facto de os alunos estarem agitados, também, dificultou a minha concentração e tornou a aula muito cansativa.

4.2.2.3. Quinta aula

A professora estagiária lecionou a quinta aula no dia 21 de fevereiro de 2019. Nesta aula definiu-se função real de variável real e incidiu-se na determinação de domínios de funções reais de variável real definidas pela respetiva expressão analítica.

- *O plano de aula*

O plano da quinta aula, teve de ser ajustado, em função dos conteúdos lecionados na aula anterior. A primeira parte, relativa à definição de uma função r.v.r., análise do gráfico cartesiano de uma função e caracterização de uma função r.v.r., já tinha sido abordada, no plano de aula, na reflexão da aula quatro. A estrutura delineada nesse plano, foi mantida no plano de aula atual, tendo agora sido abordados mais alguns conteúdos. Assim, nesta reflexão apenas serão contemplados os conteúdos que se prevê lecionar, além dos atrás mencionados, nomeadamente, igualdade de funções e restrições de uma função.

Para elaborar o plano de aula no que diz respeito ao conceito de igualdade de funções achei que fazia sentido introduzi-lo através de exemplos. Considerei, então três exemplos que permitissem discutir com os alunos se duas funções dadas, seriam ou não iguais. O primeiro exemplo foi elaborado de forma a considerar duas funções com domínio igual, cada objeto tinha a mesma imagem por qualquer uma das funções, mas as funções tinham conjuntos de chegada distintos. O segundo exemplo contemplava duas funções com domínios diferentes, embora com conjunto de chegada igual e expressão analítica também igual. Por último, considerei duas funções com o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e embora a expressão analítica fosse diferente, cada objeto tinha a mesma imagem por qualquer uma das funções. Embora os exemplos fossem muito simples, pareceram-me adequados para que todos os alunos entendessem o conceito em causa.

Após o conceito de igualdade de funções, tive algumas dúvidas em como elaborar o restante plano. Pensei que seria importante considerar um momento de resolução de exercícios de aplicação, antes de introduzir o conceito de restrição de uma função. No entanto, optei por alterar a estrutura. Considerei a exposição de conteúdos mais concentrada, embora sempre apoiada com resolução de exemplos, e no último momento de aula os alunos resolveriam os exercícios de aplicação que tinha para propor. Esta opção pareceu-me mais adequada em termos de rentabilidade de tempo e não se tratando de muitos conceitos novos, pareceu ajustada.

A aula terminaria depois da marcação dos trabalhos para casa (TPC). Nestas três aulas consecutivas, considerei, sempre, enviar trabalhos para casa. Tive o cuidado de pensar em exercícios adequados e de modo a que fosse possível enviar poucos TPC, de resolução rápida e simples, pelo menos na primeira e segunda aula por serem aulas muito próximas. De qualquer modo, pareceu-me importante fazê-lo, para que os alunos tivessem oportunidade de sozinhos, verificarem se tinham ou não compreendido os conteúdos lecionados em aula.

Na escolha e elaboração dos exemplos e dos exercícios para aplicação dos conteúdos em aula procurei que, além de simples e adequados aos conteúdos lecionados em aula, também permitissem trabalhar conteúdos lecionados nas aulas anteriores. Tal permitiria, manter presente alguns dos conceitos dados anteriormente, bem como aplicá-los em novas situações, em associação a novos conteúdos.

- *A aula*

A aula começou com a correção do trabalho de casa, seguindo-se a resolução de um exercício com várias representações gráficas e cujo objetivo era identificar quais poderiam representar funções. No caso de poderem representar funções, também se faria a análise do gráfico. Ao contrário do que era esperado, os alunos evidenciaram muitas dificuldades na análise dos gráficos, nomeadamente na identificação do domínio e contradomínio das funções. Tal facto, fez com que fosse necessário todo o primeiro tempo de aula para resolver este exercício e esclarecer todas as dúvidas que foram surgindo por parte dos alunos. O segundo tempo foi dedicado exclusivamente à definição de função real de variável real, através de uma expressão analítica e consequentemente caracterização de uma função r.v.r. Para além dos exemplos considerados no plano de aula para caracterização de algumas funções, ainda considerei mais alguns durante o decorrer da mesma. Tal surgiu da necessidade de clarificar o modo como se determina o domínio de uma função r.v.r. e chamar a atenção dos aspetos que devem ser tidos em conta, na sua determinação. Houve ainda tempo para resolver alguns exercícios de aplicação cujo objetivo era determinar domínios de funções r.v.r. Não havendo tempo para lecionar mais nenhum conteúdo, marquei os TPC e dei a aula por terminada.

Finalizada a aula foram feitas as seguintes críticas:

- Na correção do trabalho de casa insisti sempre no facto de que um determinado valor não pertencia ao domínio da função, porque o gráfico apresentava uma bola aberta. Devia ter dito, que o ponto não pertencia ao gráfico, logo a sua abcissa não pertencia ao domínio. No mesmo exercício, apenas comecei a analisar o gráfico no ponto de abcissa -2 (extremo inferior do intervalo que corresponde ao domínio da função), mas podia ter começado a analisar à esquerda de -2.

- No momento em que caracterizei a função na forma, $\begin{array}{l} f\colon A \longrightarrow B \\ \quad x \mapsto f(x) \end{array}$, deveria ter clarificado porque não se pode usar o mesmo tipo de notação para definir a aplicação de A em B ("$\longrightarrow$") e a correspondência que associa a cada elemento de A um e um só elemento de B ("$\mapsto$"). Deveria ter também chamado a atenção que é possível usar "↷" em vez de "$\mapsto$".

- Quando me referi ao conjunto de chegada de uma função r.v.r. disse apenas "se nada for dito em contrário, o conjunto de chegada é $\mathbb{R}$". Faltou dizer, "dada uma função r.v.r. f…"

- A explicação dada para determinação do domínio não ficou muito clara.

- Quando, num exemplo, pretendi que se caracterizasse uma dada função escrevi no quadro, "Seja g uma função r.v.r. definida por: $g(x) = \frac{1}{x}$", mas faltou escrever "caracterize g", limitando-me a dizê-lo oralmente.

- Quando pedi para caracterizar a função r.v.r. definida por $i(x) = \sqrt{2x+1}$, alguns alunos disseram que x não podia ser negativo. Podia ter arranjado um exemplo de $x < 0$ que desse significado à expressão.

- Nunca referi a relevância de escrever o conjunto em compreensão.

- Em todos os exemplos houve o cuidado de escrever "seja … uma função r.v.r". Foi importante fazê-lo pois facilita a compreensão da linguagem, por parte dos alunos.

Nesta aula alguns alunos não fizeram nenhum registo no caderno e outros não passaram nenhum exemplo para o caderno.

4.2.3. Terceiro período

No 3.º período foram lecionadas, pela professora estagiária, duas aulas. Inicialmente estava apenas previsto a lecionação de uma aula. No entanto, a aula inicialmente prevista não decorreu da melhor forma tendo sido solicitado, por sugestão da professora orientadora, uma nova aula avaliada. Não tendo sido possível cumprir o plano previsto para a sexta aula, este também foi utilizado na sétima aula. Assim, a reflexão das duas aulas é feita em simultâneo.

4.2.3.1. Sexta e Sétima aulas

A sexta aula foi lecionada no dia 13 de maio de 2019 e a sétima aula no dia 16 de maio de 2019. As duas aulas abordaram o conteúdo de funções quadráticas do domínio de funções reais de variável real (FRVR 10).

- *O plano de aula*

Ao elaborar o plano de aula sobre funções quadráticas achei, logo à partida, que era um pouco ambicioso, no que concerne aos conteúdos que me propunha lecionar e o tempo previsto para os mesmos. No entanto, como para alguns dos conteúdos já existia, ou deveria existir, alguns conhecimentos por parte dos alunos, pensei que talvez fosse possível cumpri-lo. Na realidade, os alunos já conhecem as funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$, bem como a sua representação gráfica e propriedades, desde o 9.º ano. No mesmo ano letivo, o método de completar o quadrado também foi lecionado e já durante este ano letivo o mesmo método já tinha sido revisto, no âmbito do tópico de geometria. Tendo isto em conta e sabendo que as transformações de gráficos de funções estavam bem presentes, pois tinham sido lecionadas nas últimas aulas, resolvi então avançar com o plano que propus.

Delineei a sua estrutura, sendo que me foram surgindo algumas dúvidas relativamente à ordem pela qual os diferentes conteúdos deveriam ser abordados e qual a melhor forma de o fazer. Qual seria a ordem mais natural, se deveria introduzir primeiro os conceitos teóricos ou se deveria fazer a primeira abordagem através de exemplos, foram outras questões que fui levantando a mim própria. À medida que o plano foi sendo elaborado e estas questões foram surgindo, também foi sofrendo alterações, quer na ordem, quer nos exemplos que fui escolhendo, os quais em alguns casos alterei por outros que achei serem mais apropriados. Este plano pressupunha uma aula mais teórica e centrada no professor sendo, no entanto, possível envolver os alunos pedindo-lhes para colaborarem com o professor na resolução de algum exemplo no quadro. No entanto, foi contemplado, no plano, alguns momentos de resolução de exercícios, para que os alunos pudessem aplicar os conhecimentos adquiridos em aula. Todos os exercícios foram criteriosamente selecionados. Para este plano procurei escolher exercícios que fossem de grau crescente de dificuldade. Iniciando com exercícios simples e de aplicação direta. Os alunos teriam, numa fase posterior, exercícios com maior grau de dificuldade e que exigiam a ligação a conteúdos já lecionados anteriormente. Alguns dos exercícios selecionados permitiam várias resoluções. Nomeadamente nos exercícios cuja função quadrática é dada na forma $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, em que é pedido para a escreverem na forma equivalente $a(x - h)^2 + k, a \neq 0$ e posteriormente para determinar os zeros, caso existam. Quando fiz a escolha, pensei que provavelmente alguns alunos iriam recorrer, desnecessariamente, à fórmula resolvente para determinar os zeros, o que me iria criar uma oportunidade pedagógica para discutir com os alunos qual a forma de resolução mais simples.

Após troca de ideias com a professora coordenadora ainda introduzi um novo exemplo no plano concebido inicialmente. Este exemplo foi introduzido aquando da revisão do método de completar o quadrado em que consideraria um primeiro exemplo com $a = 1$.

Nesta aula optei por não utilizar nenhum *PowerPoint* de apoio. Ao tomar esta decisão, também me levou a pensar melhor na forma, como deveria organizar o quadro. Como deveria surgir a informação. Criar ou não quadros para sintetizar e organizar a informação, ou esta ir aparecendo de forma contínua e "corrida". Talvez possa não ter tomado as melhores opções, mas todas elas foram pensadas tendo em consideração as características da turma e os conteúdos a lecionar.

- *A aula 6*

A aula teve início à hora marcada.

No primeiro tempo a maioria dos alunos estiveram concentrados. O mesmo não se verificou no 2.º período de aula, onde se mostraram mais desatentos e evidenciaram maior dificuldade em entender os conteúdos lecionados. O plano de aula não foi cumprido; não tendo sido possível lecionar o que estava previsto relativamente à família de funções quadráticas do tipo $f(x) = a(x - h)^2 + k, a \neq 0$.

Tal deveu-se, essencialmente, às grandes dificuldades apresentadas pelos alunos, que não eram de todo esperadas.

No 1.º período recorreu-se à definição de parábola como lugar geométrico, para que os alunos ficassem com a noção, que nem sempre é possível representar uma parábola através de uma função de 2.º grau. Após este primeiro momento definiu-se função quadrática e foi estudada a família de funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$, relativamente a: coordenadas do vértice, eixo de simetria, sentido da concavidade, domínio, contradomínio, zeros, extremos e monotonia. Foi também demonstrada a monotonia de uma qualquer função desta família, quando $a < 0$ e quando $a > 0$. Não sendo possível lecionar mais nenhum conteúdo, por limite de tempo, optei por mandar estudar o método de completar o quadrado, como trabalho de casa, e dei a aula por terminada.

O momento em que foi feita a demonstração, foi extremamente confuso. Talvez o quadro não estivesse bem organizado devido às questões constantes apresentadas pelos alunos. Disse várias vezes oralmente, que ia demonstrar que qualquer função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, a > 0$ decrescia em $]-\infty, 0]$ e crescia em $[0, +\infty[$, mas não entendiam o que queria demonstrar. Por sugestão, da professora Rosário acabei por atribuir números às demonstrações, colocando-os no quadro resumo que tinha elaborado (Dem1: Uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, a > 0$ é crescente em $[0, +\infty[$ e Dem2: Uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, a > 0$ é decrescente em $]-\infty, 0]$) o que ajudou a clarificar a situação. Após a demonstração, surgiu-me de imediato a questão "Faço ou não faço a demonstração, em aula, para o caso $a < 0$? Envio para trabalho de casa?". Ao efetuar o plano de aula, tinha pensado enviar para trabalho de casa, mas no momento decidi pedir a dois alunos para virem ao quadro e em simultâneo fazerem as seguintes demonstrações (3 e 4): Dem3: Uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, a < 0$ é crescente em $]-\infty, 0]$ e Dem4: Uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2, a < 0$ é decrescente em $[0, +\infty[$. Pensei que seria rápido, que todos os alunos tivessem a oportunidade de tentar fazer a demonstração e que os alunos com maiores dificuldades pudessem acompanhar do quadro. Nada do que previ aconteceu. Este momento foi particularmente difícil e ilustrativo não só de que a maioria dos alunos não tinha entendido o que fora explicado anteriormente, mas que também não se esforçam para tentar aprender. Querem receitas, aplicar tudo da mesma forma sem pensar se é ou não adequado à situação concreta. Deparei-me com uma aluna, que no quadro tentava fazer cópia integral do que tinha no caderno. Tal situação fez-me focar mais nos alunos que estavam no quadro e não tanto na restante turma. Notei que a maioria dos colegas também não estava a conseguir fazer a demonstração no caderno, pelo que, no final tentei voltar a sintetizar para toda a turma, chamando a atenção para a escrita e para a necessidade de justificar as várias etapas da demonstração. Talvez a escolha dos alunos para irem ao quando, também não tenha sido a melhor. Talvez devesse ter escolhido alunos com melhor desempenho na disciplina, para que tudo decorresse com maior normalidade e rapidez. No entanto, esta escolha penso que mostrou, claramente, as dificuldades que a maioria dos alunos têm em entender a demonstração de um dado resultado.

A Professora titular de turma e a Professora Doutora Helena Santos tinham vários comentários a fazer, muitos dos quais, não me tinha sequer dado conta que tinham falhado e com os quais concordo completamente. Ao ouvir alguns dos comentários fez-me pensar que é importante para os professores, por vezes, enquanto damos aulas afastarmo-nos do quadro e lermos o que escrevemos. Provavelmente daremos conta de algumas gralhas no que escrevemos. Alguns dos comentários feitos, eu própria tinha dado conta do que tinha dito, enquanto lecionava como no caso em que falei de contração e dilatação horizontal da parábola, onde na realidade deveria ter falado de contração e dilatação vertical da parábola. Nesta aula cometi falhas, que não são habituais, e fui muito menos rigorosa quer na linguagem, quer na escrita. Por exemplo, quando defini parábola como lugar geométrico, ao colocar a definição no quadro, defini-a como o "conjunto de pontos que…" em vez de "conjunto de pontos do plano que…". Neste caso, penso que se tivesse lido o que escrevi ter-me-ia apercebido do erro e tê-lo-ia corrigido. Também, quando defini função quadrática, não escrevi que se tratava de uma função real de variável real. Tendo sido alertada pela professora Rosário, corrigi de imediato a definição que estava no quadro. No entanto, poderia ter aproveitado para perguntar aos alunos o que faltava na definição e não o fiz, limitando-me apenas a chamar a atenção que a definição não estava correta, a corrigi-la de imediato e a pedir para também corrigirem no caderno. Referi-me à família de funções do tipo $f(x) = ax^2, a \neq 0$, sem mencionar que se tratava de funções reais de variável real, ou de funções quadráticas. Uma outra falha apontada foi ao indicar os intervalos de monotonia que, tendo chamado à atenção oralmente que os intervalos tinham de ser fechados em 0, nas duas situações, ($a < 0$ e $a > 0$) coloquei, no quadro, os intervalos abertos nesse extremo.

- *A aula 7*

A aula teve início à hora marcada.

Neste dia os alunos estavam mais agitados e alguns deles estiveram desatentos todo o tempo. Nesta fase do ano letivo, alguns alunos da turma já desistiram da disciplina, assumindo uma mudança de curso no próximo ano letivo. Este facto condiciona, de alguma forma, o trabalho em aula pois este grupo não passa nada para o caderno e está permanentemente desatento. Nesta aula, um dos alunos, para além de estar desatento, esteve constantemente a perturbar e a distrair os colegas na proximidade, pelo que tive de o chamar várias vezes à atenção quanto ao comportamento e atitude em aula. Num dado momento, tive necessidade de chamar toda a turma à razão, devido ao barulho generalizado e à postura da maioria dos alunos face ao trabalho que estava a ser desenvolvido.

No que diz respeito aos conteúdos lecionados, mais uma vez não foi possível cumprir integralmente o plano de aula previamente elaborado. Apenas revi o método de completar o quadrado e mostrei que qualquer função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ também pode definir-se por uma expressão equivalente do tipo $a(x-h)^2 + k$ com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$. Foram efetuados inúmeros exemplos, alguns deles não contemplados no plano de aula, de modo a ir de encontro às dificuldades evidenciadas pelos alunos. Faltando 5 minutos para a aula terminar, optei por mencionar ainda que “O vértice de uma função quadrática definida por $a(x-h)^2+k$ tem coordenadas (h,k), sendo $k=f(h)$” e enviar o trabalho para casa. Embora, apenas escrevesse estes resultados no quadro, não os demonstrando, achei que seria um bom ponto de partida para a aula seguinte, onde se poderia voltar a referi-los e nessa altura mostrar que se verificam para qualquer função quadrática definida por $a(x-h)^2+k$.

Nesta aula, não foi possível avançar mais nos conteúdos a lecionar devido às grandes dificuldades evidenciadas por quase todos os alunos, mesmo os alunos que usualmente têm um desempenho acima da média. Tais dificuldades tornaram-se mais evidentes, quando atribui um valor negativo ao coeficiente de x^2, ou quando este não era múltiplo do coeficiente de x. Não era espectável, que os alunos revelassem tantas dificuldades o que levou à necessidade de efetuar mais exemplos do que os inicialmente previstos. Atendendo às inúmeras questões que foram sendo colocadas por alguns alunos, houve também necessidade de encontrar estratégias diferenciadas para explicar o método de completar o quadrado. Esta opção, revelou-se fundamental para esclarecer todos os alunos interessados, mas também fez com que o ritmo da aula fosse claramente afetado, não permitindo avançar para os conteúdos previstos no plano.

Muitos dos exemplos/exercícios que foram resolvidos em aula foram pensados no decorrer da aula de acordo com a necessidade sentida. Foi tido em atenção o grau crescente de complexidade e foram orientados para que no final conseguissem definir uma qualquer função quadrática na forma $ax^2+bx+c, a\neq 0$, por uma expressão equivalente do tipo $a(x-h)^2+k$.

Esta aula decorreu claramente melhor que a anterior. Fui muito mais cuidadosa e rigorosa em tudo o que disse e escrevi no quadro. No final, as professoras fizeram poucos comentários. A Professora Maria Helena achou que não tinha ficado claro para todos os alunos que $f(h)=k$ e que sendo simples e rápido o poderia ter demonstrado antes de dar aula por terminada. A professora Rosário mencionou que se fosse ela a dar a aula, teria optado por uma estrutura diferente. Teria começado por mostrar, recorrendo às transformações do gráfico de uma função, que o vértice de uma função quadrática na forma $a(x-h)^2+k, a\neq 0$ tem coordenadas (h,k) mostrando a vantagem de escrever qualquer função quadrática nesta forma. Só no final incidiria no método de completar o quadrado. No entanto, também referiu que cada pessoa toma as suas opções de acordo com o que parece mais adequado e como tal não quis interferir nas opções que tomei. Também referiu que, em algumas situações, poderia ter aproveitado para reforçar o “porquê” de dividir por 2 o coeficiente de x. Tendo feito bem em colocar no quadro o desenvolvimento de quadrado do binómio, poderia ter aproveitado para estabelecer essa relação. Ainda realçou o cuidado que houve, quando coloquei no quadro a função quadrática na forma $a(x-h)^2+k, a\neq 0$, em escrever que $h,k\in\mathbb{R}$.

4.3. Avaliação

Na Escola Secundária António Gedeão a avaliação das turmas do 10.º ano é feita tendo em consideração os critérios definidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – critérios de avaliação das turmas de 10.º ano da ESAG

Instrumento de avaliação	Peso na classificação final
Testes de avaliação	70%
Fichas de avaliação	20%
Trabalho realizado em aula	5%
Trabalho de casa/ participação/ comportamento	5%

A turma acompanhada realizou ao longo do ano letivo:

- um teste diagnóstico, no primeiro dia de aulas;
- seis testes de avaliação, dois em cada um dos períodos;
- duas fichas de avaliação, durante o 2.º período e uma no primeiro.

Uma das fichas de avaliação foi elaborada e corrigida pela professora estagiária. A sua elaboração surgiu em sequência das aulas 3, 4 e 5 e incidiu sobre generalidades de funções e domínios de funções r.v.r. A classificação das questões foi discutida com a Professora Rosário Lopes.

No primeiro teste do 3.º período, a professora estagiária também participou na correção e classificação dos testes de alguns alunos da turma. Estas correções foram efetuadas para posterior comparação e discussão dos critérios de correção utilizados pela professora estagiária e pela professora titular da turma. Para tal, fotocopiaram-se os testes de um grupo de alunos, para que pudessem ser corrigidos e classificados pelas duas professoras. Quando comparadas as correções dos testes verificaram-se desvios nas notas finais entre -0,2 e 0,8 valores. As diferenças registaram-se essencialmente no primeiro grupo, onde se registou uma pequena diferença na distribuição da cotação e onde se verificaram diferenças nos critérios de correção usados pelas duas professoras. Por exemplo, no primeiro grupo uma das questões pedia para indicar o intervalo de maior amplitude, onde a função dada fosse crescente em sentido lato. Quando um aluno indicou um sub-intervalo onde a função era estritamente crescente, ou onde a função era constante, a professora titular não atribuiu cotação nenhuma, por considerar que a questão era muito simples. Nestas situações a professora estagiária atribuiu metade da cotação. Na distribuição da cotação a professora orientadora atribuiu menos dois pontos ao domínio e contradomínio (em conjunto) e mais dois pontos ao conjunto dos majorantes, que a professora estagiária.

4.4. Direção de turma

No âmbito do estágio pedagógico está também previsto que sejam realizadas tarefas próprias do diretor de turma. No entanto, não foram muitas as tarefas realizadas neste âmbito, pois não foi possível articular o horário com a diretora de turma, uma vez que esta desenvolve um projeto com alunos do 1.º ciclo, que condiciona o seu horário na escola secundária, onde decorreu o estágio pedagógico. Apenas assessorei as reuniões de encarregados de educação no final de 1.º e 2.º período. Foi, contudo, importante perceber como se deve conduzir uma reunião deste tipo, quais as informações que devem ser dadas aos encarregados de educação, quer alertas, quer orientações. Foi possível presenciar, também, o quão complexo se pode tornar uma reunião desta natureza.

4.5. Prática pedagógica na turma do 9.º ano

Na turma do 9.º ano foram lecionadas apenas três aulas, ao longo do ano letivo. Uma no 1.º período e duas no 2.º período. Todas as aulas são de dois blocos de 50 minutos.

4.5.1. Primeira aula

A primeira aula lecionada à turma do 9.º ano decorreu no dia no dia 12 de novembro de 2018. A aula incidiu sobre gráficos de funções quadráticas do tipo $ax^2, a \neq 0$, incluído no domínio de Funções, Sequências e Sucessões 9.º ano (FSS9).

- *O plano de aula*

Quando me propus lecionar a aula sobre gráficos de funções quadráticas surgiu-me, de imediato, a ideia de propor aos alunos uma tarefa exploratória, onde fosse possível que os próprios conseguissem visualizar algumas das suas propriedades. Assim, a primeira fase de preparação da aula, foi encontrar uma tarefa que fosse de encontro às minhas expetativas e que, ao mesmo tempo, pudesse fazer uma ponte entre a matemática e a sua aplicação à realidade. A tarefa "Construção de uma ponte" pareceu-me que seria uma boa opção para trabalhar os conceitos pretendidos. Elaborei a tarefa e a partir dela delineei o plano de aula. A princípio efetuei um plano, onde propunha aos alunos que realizassem toda a tarefa e no final faria a síntese e a exposição dos conteúdos. Por sugestão da professora coordenadora, fiz algumas adaptações à tarefa, quer em termos de linguagem, quer na estrutura, passando a mesma a ser composta por duas partes distintas. Estas alterações permitiriam fazer a exposição dos conteúdos em dois momentos, pelo que seria possível introduzir alguns conceitos, após a realização da primeira parte, que seria útil para a realização da segunda parte da tarefa. Como o início da tarefa fazia referência ao termo "parábola", que era novo para os alunos, a professora coordenadora sugeriu que passasse, no começo da aula, um filme do "Isto é Matemática", sobre as parábolas. Concordei de imediato com a sugestão, o filme seria bom não só para a introdução das parábolas, mas também para captar a atenção dos alunos.

A tarefa promovia a utilização de *software* de geometria dinâmica, *e.g. GeoGebra*, ou de calculadora gráfica. Perante estas duas hipóteses achei melhor optar pela calculadora gráfica, por vários motivos, a saber:

- A biblioteca da escola tem disponíveis calculadoras gráficas do mesmo modelo, para empréstimo aos alunos, em número suficiente para poderem trabalhar a pares;
- O recurso à calculadora gráfica, permite permanecer em sala de aula permitindo maior flexibilidade no decurso da própria aula (o uso do GeoGebra obrigaria a deslocação da turma à biblioteca e depois novamente regresso à sala de aula para síntese e consolidação dos conteúdos, com perdas substanciais de tempo de aula)

Tal como a tarefa foi sendo adaptada, também o meu plano de aula foi sofrendo alterações. Primeiro achei que seria mais vantajoso sintetizar a matéria no quadro, à medida que os alunos fossem resolvendo a tarefa no quadro. Pesando prós e contra, acabei por optar pela elaboração de alguns slides em PowerPoint. Há sempre vantagens e desvantagens nas opções que tomamos. Neste caso, achei que mesmo com *slides* seria sempre possível fazer referências no quadro que considerasse importante. Por outro lado, os alunos poderiam não passar os conceitos para o caderno, mas para colmatar essa situação o ficheiro que usei foi, posteriormente, disponibilizado no *moodle*, de modo a que todos tivessem acesso a ele.

Na preparação desta aula, para além da tarefa e dos conteúdos teóricos, também tive em conta a escolha de exercícios para aplicação dos conteúdos lecionados. Como o manual do 9.º ano tem bastantes exercícios de aplicação, e a turma tem um ritmo de trabalho muito baixo e heterogéneo, pareceu-me adequado utilizar exercícios do manual, adaptados aos conceitos trabalhados na aula e em aulas anteriores. Adicionalmente, organizei um conjunto diversificado de exercícios, na sua maioria de resolução direta, para os alunos realizarem em casa.

- *A aula*

Iniciei a aula com o filme sobre as parábolas que, sendo uma novidade para a turma, funcionou muito bem. Os alunos mostraram-se, no geral atentos e curiosos. Penso que foi bastante útil e que, pelo menos, não vão esquecer o que é uma parábola.

Terminado o filme, foram distribuídas as calculadoras (uma por cada mesa) e principiei a explicação do funcionamento das mesmas. Comecei por pedir aos alunos que indicassem duas expressões algébricas, uma de uma função de proporcionalidade direta e outra de uma função de proporcionalidade inversa. Vários alunos participaram e acabaram por sugerir mais do que uma expressão algébrica, para cada caso. Ao explicar como deveriam introduzir a expressão algébrica e como visualizariam o gráfico correspondente, verifiquei que muitas máquinas estavam “desconfiguradas” (umas estavam com coordenadas polares, outras a janela de visualização estava mal configurada originando erro e impossibilitando a visualização do gráfico de funções). Tal situação obrigou à necessidade de repor as configurações, sendo necessário verificar o que se passava em cada uma das máquinas que apresentava problemas. Aproveitei esta situação para ensinar a alguns alunos a verificar as configurações das máquinas. Com o auxílio da professora Rosário, conseguimos operacionalizar todas as máquinas. Este contratempo, fez com que se gastasse muito tempo de aula que não estava previsto, inviabilizando a possibilidade de realização de exercícios no final, tal como estava previso. Fez também com que alguns alunos aproveitassem para dispersar. Depois de tudo em ordem, voltei a mostrar como inserir as expressões algébricas e a visualização dos gráficos. Indiquei como poderiam usar o "TRACE" para percorrer a curva correspondente a cada função e como podiam "saltar" para outras curvas. Disse-lhes também que a máquina permitia explorar muito mais, mas que não precisando de mais comandos para a tarefa que iam realizar, e por escassez de tempo, o faríamos em outra ocasião. Mais tarde, aquando da realização da tarefa verifiquei que muitos dos alunos não estiveram atentos ao que disse sobre o comando "TRACE".

Após este momento distribui as fichas da tarefa. Expliquei claramente que era para trabalharem a pares, em autonomia, isto é, sem mais ajuda da professora. Que deviam começar por fazer apenas a primeira parte. Depois de recolher o que tinham feito, de corrigirmos no quadro e de darmos alguns conceitos é que fariam a segunda parte. Mencionei também que o trabalho que iam realizar ia ser avaliado.

No início, notei que quase todos os alunos tiveram grande dificuldade em começar a fazer a tarefa. A grande maioria não conseguia compreender o enunciado. Mesmo depois de o compreenderem, ficaram sem saber o que fazer. Como deviam explorar os gráficos dos modelos propostos, de modo a conseguir ultrapassar as suas dificuldades e chegar à solução. Com algumas indicações adicionais alguns dos grupos começaram a entender e a delinear estratégias para resolver o problema. Alguns dos alunos não tentaram sequer realizar a primeira parte da tarefa. Fui circulando, chamando a atenção para trabalharem, mas não mostraram interesse e não fizeram o trabalho proposto. Um dos grupos terminou o trabalho mais cedo e tal como tinha previsto, pedi para começarem a fazer o exercício 3 da pág. 88 do manual. Devido às dificuldades apresentadas no início da tarefa dei mais 10 minutos para a terminarem.

Terminado o tempo, recolhi a resolução da primeira parte e pedi a um aluno para ir ao quadro mostrar como o seu grupo tinha resolvido as questões da primeira parte da tarefa. O aluno expôs o que tinha feito, perguntei aos colegas se estavam de acordo e clarifiquei, para toda a turma, alguns pontos onde achei que poderiam ter ficado algumas dúvidas. O aluno voltou ao seu lugar e introduzi alguns conteúdos teóricos necessários à realização da segunda parte da tarefa. Dei a noção de parábola, esclareci o conceito de concavidade e introduzi o conceito de família de funções. Após este momento, os alunos começaram a fazer a segunda parte.

Nesta segunda parte, a maioria dos alunos já tentou fazer a tarefa, embora alguns continuassem com muitas dificuldades na execução. Não sabiam o que deviam escrever e mesmo dizendo oralmente a que conclusões tinham chegado, não sabiam como as expor por escrito. Fui dizendo para escreverem tudo o que achassem necessário e tentassem explicar da melhor forma possível. Terminado o tempo estipulado, recolhi a segunda parte e uma aluna foi ao quadro resolver. Sintetizei rapidamente, introduzi os conceitos e os resultados relativos aos gráficos das funções quadráticas do tipo $y = ax^2, a \neq 0$. Não havendo tempo para fazer os exercícios que tinha pensado para os alunos realizarem em aula, marquei os trabalhos para casa (exercícios 2 e 3 da pág. 86 e 7 da pág. 87 do manual) e dei a aula por terminada.

Foi uma aula difícil, com muitos alunos desatentos e sem colaborarem no trabalho que lhes foi proposto. Mesmo tendo a possibilidade de usar a calculadora gráfica e de fazerem um trabalho diferente do habitual, não o viram como um fator de motivação extra. Tive de chamar a atenção várias vezes os alunos, a maioria sem sucesso. Quando questionados alguns alunos sobre conceitos que tinham sido acabados de lecionar, mesmo com os conteúdos no quadro, não sabiam responder às questões, por estarem todo o tempo à conversa.

No final, a professora orientadora disse que não tinha grandes comentários. Mencionou apenas que quando expliquei o que era uma parábola podia ter agarrado no vídeo que mostrei e poderia ter feito referência ao conceito como lugar geométrico, isto é, o conjunto de pontos que estão à mesma distância de uma reta e de um dado ponto (foco).

A turma é bastante difícil, já o sabia da observação que tenho feito ao longo das aulas assistidas. Todos os dias são um desafio, com alunos completamente desinteressados e tentarem fazer frente ao professor. Ao lecionar esta aula, tive a plena consciência do quão complicado é trabalhar com alunos com estas características.

4.5.2. Segunda aula

A segunda aula aconteceu no dia no dia 28 de janeiro de 2019. A aula enquadrou-se no domínio de Álgebra 9.º ano (ALG9), incidindo no descritor 1.8. das Metas Curriculares: Resolver conjunções e disjunções de inequações do 1.º grau e apresentar o conjunto-solução na forma de um intervalo ou como reunião de intervalos disjuntos.

- *O plano de aula*

O plano de aula para a sessão onde se pretendia introduzir a conjunção e a disjunção de condições foi criando de modo muito imediato e natural. Sabendo que existiam trabalhos para casa, foi considerado um primeiro momento dedicado à verificação e correção dos exercícios, em que os alunos apresentassem dúvidas. De seguida, passar-se-ia para uma pequena revisão sobre a interseção e reunião de conjuntos. Contemplados alguns exemplos e reforçando a importância da representação dos conjuntos na reta real, usando alturas diferentes e, se possível, cores diferentes para sombrear cada um dos conjuntos.

A introdução da disjunção e da conjunção de inequações, foi pensada recorrendo em primeiro lugar a exemplos muito simples, para que os alunos pudessem colaborar na sua resolução. Após os exemplos, a síntese seria feita no quadro e passada para o caderno. O plano também previa a necessidade de realçar a diferença de notação utilizada entre condições e entre conjuntos. O último momento de aula, seria dedicado à resolução de exercícios de aplicação. Os exercícios foram cuidadosamente elaborados e adaptados de modo a trabalhar os conceitos lecionados; atendendo a que fossem diversificados e utilizassem diferentes notações e grau crescente de dificuldade. Para trabalho de casa baseei-me em exercícios do manual. De modo a agilizar a aula, foi elaborado em simultâneo com o plano de aula, um documento PowerPoint com os enunciados dos exercícios de aplicação a propor aos alunos.

- *A aula*

A aula iniciou, tal como previsto, com a correção do trabalho de casa, especificamente com aqueles em que os alunos mostraram ter dificuldades. Quase todo o plano foi cumprido, embora a resolução dos exercícios de aplicação finais ficasse muito aquém do previsto. Tal aconteceu, não só porque os conceitos levaram mais tempo a ser explicados do que o que previ inicialmente, mas também pela falta de autonomia e vontade de trabalhar, que muitos dos alunos da turma apresentam. Nos primeiros 50 minutos da aula, os alunos mostraram-se interessados e participativos. Responderam às questões que fui fazendo e anteciparam-se, por vezes, em algumas delas. Nos 50 minutos finais, muitos dos alunos mostraram-se mais desatentos e apáticos. Alguns deles, não passaram a maioria dos conteúdos para o caderno.

Durante a aula referi, por diversas vezes, que quando temos uma conjunção ou disjunção de inequações, as inequações podem ser resolvidas separadamente, bastando no final intersetar ou reunir o conjunto-solução. No entanto, os alunos assumiram que deveriam resolver as inequações paralelamente e em simultâneo.

No final da aula, foram-me feitos alguns reparos essencialmente no que diz respeito a alguns termos utilizados e, por em muitas situações, não aproveitar algumas questões colocadas pelos alunos para explorar melhor os conteúdos. Por exemplo, aquando da correção de uma inequação do trabalho de casa, quando isolei o x podia ter realçado que o sentido da desigualdade se mantinha, porque o coeficiente era positivo. Também, quando introduzi a disjunção de inequações, poderia ter salientado que o conjunto-solução resultante coincidia com o conjunto-solução de uma das inequações. Um dos alunos referiu-se a isso e, embora eu tenha realçado que isso nem sempre acontece, poderia ter aproveitado para explicar porque é que isso sucede. Ainda no último exemplo que apresentei, o conjunto-solução coincidia com o conjunto dos números reais. Como o enunciado pedia para apresentar o conjunto na forma de intervalo de números reais fui fiel ao enunciado. Oralmente mencionei, que caso o enunciado não o exigisse poderiam escrever apenas "$\mathbb{R}$" em vez de "$]-\infty,+\infty[$", no entanto, não o escrevi no quadro. As professoras referiram, também, que no início da aula comecei a resolver o primeiro exemplo sem pedir a colaboração dos alunos, mas que estes acabaram por participar de forma natural. Já no último exemplo da aula, poderia ter pedido aos alunos para o resolverem sozinhos, dando-lhes cerca de 5 minutos para o fazerem, em vez de ter optado por o resolver eu no quadro. Também foi apontado o facto de, quando utilizei pela primeira vez o símbolo de disjunção “$\vee$” não ter referido que se tratava de uma operação entre condições. Fi-lo mais tarde. Através de um quadro fiz uma pequena síntese onde realçava que a conjunção e a disjunção são operações entre condições e que a interseção e reunião são operações entre conjuntos. Nesse mesmo quadro associava a cada uma das operações o símbolo correspondente. Foi pena não ter garantido que todos os alunos o tenham passado para o caderno. Ao falar da conjunção e das possíveis formas de a apresentar referi, naturalmente, o enquadramento, mas não reforcei, que nem sempre é possível escrever uma conjunção nesta forma. Tal, poderia ter sido feito recorrendo a um exemplo evitando confusões que pudessem vir a surgir. Apesar dos reparos feitos as professoras referiram que em termos globais a aula transmitiu adequadamente os conteúdos que estavam propostos.

4.5.3. Terceira aula

A terceira e última aula à turma do 9.º ano incidiu sobre o conteúdo de lugares geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos do domínio de Geometria 9.º ano (GM9). A aula foi lecionada no dia 18 de março de 2019.

- *Tarefa e plano de aula*

Ao planear a aula para introdução dos conceitos de circuncentro e incentro de um triângulo optei por uma tarefa exploratória. Esta tarefa, tinha como objetivo a exploração de alguns pontos notáveis de triângulos. Assentava essencialmente na construção de mediatrizes de segmentos de reta e bissetrizes de ângulos e nos seus conceitos como lugar geométrico. A tarefa foi pensada para ser trabalhada em grupos de 4 alunos. Embora, os alunos da turma não estejam habituados a trabalhar em grupo, pareceu-me ser uma estratégia que poderia trazer alguma dinâmica e que os envolvesse um pouco mais que o habitual. A tarefa apelava à construção de triângulos, por cada um dos alunos. Proporcionando assim, a observação de diversos triângulos em cada grupo, estimulando a curiosidade e discussão dos resultados. Deste modo, pretendia que, discutindo em grupo, os alunos concluíssem que para qualquer triângulo, as mediatrizes de cada um dos seus lados se intersetam num único ponto, o circuncentro. E também, que este é o ponto que se encontra à mesma distância dos seus vértices, pelo que é o centro da única circunferência circunscrita ao triângulo. De forma análoga, esperava que observassem que todas as bissetrizes de cada um dos ângulos de um dado triângulo se intersetam num mesmo ponto, o incentro, e que este ponto é o centro da circunferência inscrita no triângulo. Isto é, o centro da circunferência que é tangente aos lados do triângulo. Para além do caráter exploratório da tarefa, tentei que a mesma permitisse fazer uma ponte entre os conceitos matemáticos explorados e a sua aplicação prática em exercícios adaptados a possíveis casos reais. A construção de tarefa sofreu pequenas adaptações, essencialmente em termos de linguagem, por sugestão da professora titular de turma.

Após a elaboração da tarefa delineei o plano de aula. O plano, propunha iniciar a aula com a revisão das construções necessárias à realização da tarefa. Embora fossem construções que viessem a ser trabalhadas há mais de uma semana e conhecendo as características da turma, parecia-me completamente adequado. Para além disso, a aula foi pensada em dois blocos distintos. Um primeiro bloco associado à primeira parte da tarefa e aos conceitos que ela visava e um segundo bloco associado à segunda parte da tarefa. Assim, os alunos realizariam a primeira parte, seguindo-se a discussão dos resultados em grande grupo e simultaneamente, o professor aproveitaria para sintetizar e expor os conteúdos trabalhados nessa primeira parte (circuncentro). Esperava que não fosse muito além dos primeiros 50 minutos de aula, para que a segunda parte da tarefa fosse trabalhada na segunda metade da aula. De seguida os alunos realizariam a segunda parte da tarefa, promovendo-se, no final, um novo momento de discussão, síntese e exposição de conteúdos.

A aula foi estruturada desta forma de modo a que a síntese fosse mais facilmente acompanhada por todos os alunos.

Na preparação desta aula, para além da tarefa e dos conteúdos teóricos, também tive em conta a escolha de exercícios para consolidação dos conteúdos, caso houvesse tempo para os resolver, ou caso algum grupo terminasse a tarefa mais cedo e/ou para trabalho de casa. Baseei-me essencialmente em exercícios do manual, mas que fossem ao encontro de todos os conceitos trabalhados na aula. Foram escolhidos de modo a serem diversificados, mas simples e diretos por os conceitos tratados na aula serem novos.

- *A aula*

Iniciei a aula conforme o previsto e agrupando os alunos em grupos de quatro. Ao contrário do que esperava deparei-me com o facto de, mesmo após as revisões feitas no início da aula, a maioria dos alunos não saber construir a mediatriz de um segmento de reta. E embora essa dificuldade pudesse ser colmatada pelo trabalho colaborativo, tal não aconteceu. Verifiquei que a maioria dos alunos não sabe, de todo, trabalhar em grupo. Apenas um grupo funcionou como tal, discutindo e ajudando-se mutuamente. Em todos os outros, os alunos trabalharam individualmente, chegando mesmo a ocorrer situações de colegas de carteira que usualmente resolvem exercícios em conjunto, e que neste caso foram incapazes de promover qualquer trabalho colaborativo. A maioria dos alunos apresentou grande dificuldade na realização da tarefa. Por exemplo, demonstraram dificuldade ao nível das construções, o que me obrigou a fazer uma interrupção, para dar algumas explicações adicionais para todos, como meio auxiliar dos alunos atingirem os objetivos da tarefa. Tal influenciou claramente o tempo necessário para a resolução da tarefa. Esta situação, e o facto de os alunos estarem posicionados em grupo de quatro elementos que também dificultaria a concentração na síntese dos resultados, levaram à adoção de nova estratégia: resolver a segunda parte da tarefa imediatamente após a primeira parte e realizar a síntese de resultados e exposição de conteúdos apenas no final. Mais uma vez, na segunda parte da tarefa, a maioria dos alunos demonstrou dificuldades na construção da bissetriz de um ângulo e o tempo previsto para a realização da tarefa foi largamente ultrapassado. Como consequência, não foi possível fazer a síntese e exposição de todos os conteúdos, acabando por apenas discutir e sintetizar os conteúdos relativos à primeira parte da tarefa.

Apesar das dificuldades demonstradas pela maioria dos alunos relativamente às construções e ao trabalho em grupo, foi possível verificar que, mesmo trabalhando individualmente e ultrapassadas as dificuldades, conseguiram atingir os objetivos previstos na tarefa. Foi possível vivenciar, também, que alguns alunos com mais dificuldades conseguiram, com bastante precisão encontrar os pontos notáveis do triângulo que se pretendiam trabalhar.

Foi uma aula difícil, com necessidade de atenção individualizada a muitos dos alunos de forma a colmatar as suas dificuldades e permitir o avanço na realização da tarefa. Também difícil, do ponto de vista motivacional, na medida em que fui sempre motivando, infrutiferamente, o trabalho colaborativo. Também foi difícil, porque um dos grupos não quis colaborar no trabalho que lhes foi proposto. A síntese final, não correu mal, embora não tenha sido concluída na totalidade. Alguns alunos tiveram dificuldade em manter-se atentos, mas também houve muitos que participaram na discussão. Optei por ir direcionando as questões de modo a que mais alunos participassem tentando, desta forma, mantê-los mais atentos.

No final, a professora titular de turma e a professora responsável pela unidade curricular não traçaram grandes comentários. Mencionaram o facto de não ter sido exequível fazer toda a síntese, não sendo possível avaliar muito a parte expositiva, mas que a tarefa era adequada. Também referiram que ao fazer a síntese expliquei que a intersecção de 2 mediatrizes pertencia à terceira mediatriz, mas que não ficou claro porque é que esse facto provava que O era equidistante dos três vértices e, portanto, o circuncentro. Também, não ficou muito clara a questão da unicidade. Foi-me feito o reparo relativamente aos abusos de linguagem, por vezes, usei apenas o termo "mediatriz" em vez de "mediatriz de um segmento de reta". Tal situação não ocorreu em termos de escrita no quadro.

Um outro reparo, diz respeito ao facto de não me ter imposto e ter deixado grande parte dos alunos conversarem mesmo enquanto estava a dar explicações para toda a turma.

4.6. Outro trabalho realizado na escola

Para além do trabalho pedagógico realizado, a professora estagiária também participou em algumas reuniões do grupo disciplinar de Matemática, numa do Departamento de Matemática e Ciências Experimentais e nos conselhos de turma do 10.º ano. O núcleo de professores em estágio organizou ainda um *Workshop* sobre a utilização de calculadoras e um dia da Matemática.

4.6.1. Reuniões

A professora estagiária esteve presente em todos os conselhos de turma e nas reuniões intercalares da turma do 10.º ano. Nestas reuniões foi possível conhecer melhor os restantes professores da turma e perceber melhor o desempenho dos alunos nas restantes disciplinas. Nestas reuniões também foi tratado o plano de turma e foram discutidas as estratégias para colmatar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos. Foi também importante perceber o papel dos representantes dos encarregados de educação e do delegado de turma nos conselhos de turma. A forma como intervêm e se manifestam relativamente à vida escolar dos seus educandos.

Houve, também, oportunidade de participar em algumas reuniões do grupo disciplinar de Matemática que ocorrem todas as quintas-feiras às 16:20h. A participação ocorreu essencialmente no início do ano letivo e todos os estagiários puderam participar e dar opiniões em vários assuntos tratados no decorrer das mesmas. Nestas reuniões foi possível, por exemplo, assistir à discussão da planificação anual de alguns anos escolares. A adequação das aprendizagens essenciais que entraram em vigor no presente ano letivo para o 7.º e 10.º ano de escolaridade. Propostas de atividades a realizar e à escolha do tema para o presente ano letivo "Matemática e Biodiversidade".

Também, participou nas reuniões de encarregados de educação (EE) realizadas no final de cada período. Nestas reuniões foi notório a preocupação dos EE relativamente à dificuldade de adaptação dos seus educandos, mais concretamente como isso se reflete nas notas obtidas no final de período. Contudo, a postura dos EE foi-se alterando ao longo do ano, tornando-se mais serena. Estas alterações podem refletir uma maior adaptação dos alunos às exigências do ensino secundário, conseguindo ultrapassar algumas das suas dificuldades iniciais, bem como uma maior confiança em si mesmos.

4.6.2. *Workshop*

O núcleo de Professores de Matemática em estágio na escola promoveu um *workshop* dedicado à utilização das calculadoras gráficas Ti-*N*spire e Ti 84 da *Texas Instruments* e para Casio FX-CG. Este *workshop* veio ao encontro das necessidades sentidas, em sala de aula, por algumas professoras do grupo de Matemática. Foi dirigido a alunos do 11.º ano a frequentar a disciplina de Matemática A e a alunos de MACS. Era de participação facultativa, mas ainda assim participaram mais de 30 alunos.

Para este *workshop*, foi elaborado material específico de modo a explorar o mais possível as capacidades das calculadoras. No final, terminou com exercício de aplicação dos conteúdos abordados a um caso concreto, necessitando os alunos de alear a interpretação e o conhecimento de vários conteúdos matemáticos à utilização adequada da calculadora gráfica.

Para uma melhor organização distribuímos os alunos por três grupos de trabalho de acordo com a calculadora que possuíam. Cada um dos estagiários, ficou responsável por um grupo e pela dinamização da atividade.

Após o *workshop*, foi-nos sugerido que realizássemos um inquérito. O inquérito foi distribuído posteriormente, através dos professores das turmas participantes. No entanto, apenas cerca de metade dos alunos responderam. Todos afirmavam ter gostado do evento e ter aprendido mais acerca da utilização da calculadora. Alguns sugeriam que deveriam fazer-se mais eventos do mesmo tipo.

4.6.3. O dia da Matemática

O dia da Matemática na Escola Secundária António Gedeão, inicialmente previsto para o dia 14 de março, dia do π, acabou por se realizar no dia 9 de maio, por motivo de agenda de um dos convidados.

Este dia foi promovido pelo núcleo de Professores de Matemática em estágio, que com o auxílio da Professora Rosário Lopes, delineou, organizou e dinamizou uma manhã diferente na escola. Foram organizadas atividades de caráter mais lúdico e duas palestras realizadas pelos dois convidados que trouxemos à escola: a Inês Guimarães, mais conhecida como MathGurl, e o Professor Doutor Jorge Orestes Cerdeira do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia.

4.6.3.1. Um matemático em cada porta e Gmat'19 desafios matemáticos

Uma semana antes, começou a anunciar-se o dia da matemática através da iniciativa "Um Matemático em cada porta". Esta iniciativa consistiu na colocação de imagens de matemáticos famosos (Figura 4.1) em todas as portas das salas de aula, biblioteca, refeitório e bar da escola. Associada a cada imagem existia um código QR através do qual era possível aceder a um site e ler um pouco sobre a sua história e contribuição na história da matemática. Desta forma, foi possível despertar um pouco de curiosidade relativamente à matemática em toda a comunidade escolar.

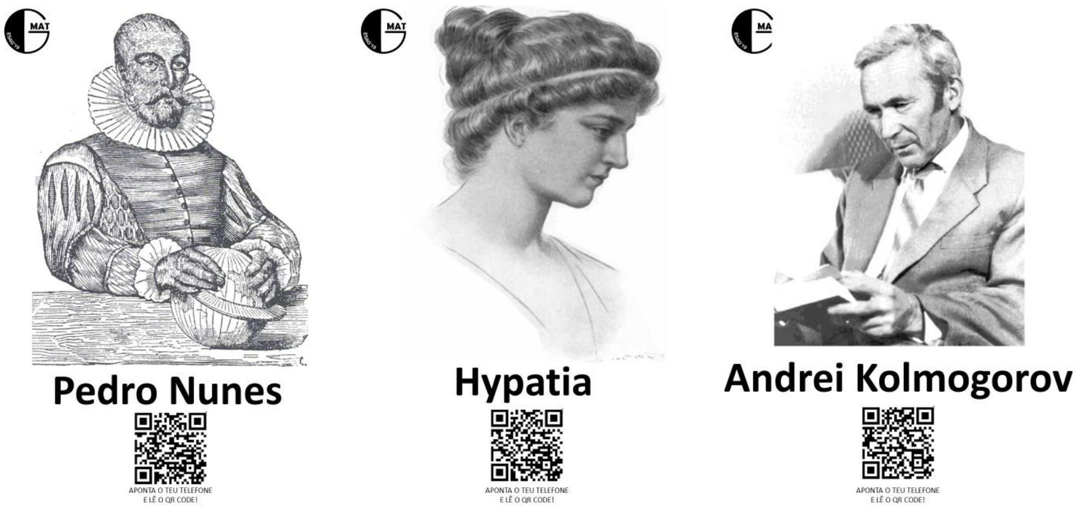


Figura 4.1 – Alguns dos Matemáticos da iniciativa "Um Matemático em cada porta"

Em simultâneo lançou-se, *on-line*, o concurso Gmat'19 desafios matemáticos. Era composto por 22 perguntas, 20 de escolha múltipla e duas de resposta aberta. Todos os alunos foram convidados a concorrer, uma única vez, até ao dia 8 de maio. O vencedor do concurso recebeu o seu prémio no dia 9, durante a palestra da MathGurl.

4.6.3.2. Palestras

As duas palestras que o núcleo de estágio levou à escola foram pensadas de modo a poder integrar alunos dos vários níveis de escolaridade. Uma mais direcionada para alunos do 3.º Ciclo e outra mais adaptada a alunos do ensino secundário.

Logo no início do ano letivo um colega de estágio sugeriu que trouxéssemos a Inês à escola. A Inês Guimarães, também conhecida como MathGurl, encontra-se ligada a vários projetos de divulgação da matemática e é uma das *youtubers* portuguesas mais famosas, com quase 80 mil seguidores. Devido à sua popularidade, juntamente com a linguagem acessível que utiliza, adivinhava-se como uma boa forma de cativar o público mais jovem, proporcionando um momento divertido aliado à matemática.

Foram muitos os professores que aderiram e levaram os seus alunos a assistir à palestra da MathGurl, que proporcionou um bom momento de matemática. Colocou desafios aos alunos obrigando-os também a participar.

Antes da Inês Guimarães falar foi mostrado a todos os presentes um vídeo tutorial que duas alunas do 12.º ano construíram na aula de Matemática, no âmbito do projeto de investigação do Professor estagiário Frederico.

No final da palestra, houve ainda tempo para a Inês autografar os livros adquiridos por alunos e professores da escola e para uma sessão fotográfica.

Figura 4.2 – Inês Guimarães durante a palestra do dia da matemática

Atualmente encontramo-nos a viver a década das Nações Unidas para a Biodiversidade (2011-2020). Esta foi decretada com o objetivo de promover a implementação de um plano estratégico para a biodiversidade, que pretende integrar e promover a biodiversidade em diferentes níveis. No âmbito do tema "Matemática e Biodiversidade" adotado pelo grupo de Matemática para o presente ano letivo, o grupo de Professores em estágio convidou o Professor Jorge Orestes Cerdeira, Professor Catedrático do departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e coordenador da linha temática de modelos matemáticos em ecologia, evolução e genética do Centro de Matemática e Aplicações para vir à escola mostrar aos alunos uma forma de como a Matemática e Biodiversidade se podem interligar. Esta palestra foi dirigida a alunos do ensino secundário. Estiveram presentes três turmas, uma das quais de MACS.

De uma forma muito simples e interativa o Professor Doutor Jorge Orestes Cerdeira apresentou vários exemplos de como os grafos podem ser utilizados na resolução de problemas ligados à biologia e à ecologia (um dos quais ligado à fragmentação dos habitats).

A palestra do Professor Doutor Jorge Orestes Cerdeira foi a última atividade inserida no dia da matemática, que não podia ter terminado da melhor forma.

5. Reflexão sobre a prática pedagógica

Ninguém caminha sem aprender a caminhar, sem aprender a fazer o caminho caminhando, refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs a caminhar.

Paulo Freire

Uma escola de ensino básico e secundário era um lugar longínquo na minha existência. Um espaço de aprendizagem, mas com características bem diferentes das que vivi enquanto estudante. Quer em termos organizacionais, quer pessoais muito mudou. Os jovens são diferentes e têm necessidades e exigências diferentes dos de há 30 anos atrás. Embora, continuem a ver na maioria dos professores, alguém em quem podem confiar.

Voltar a este espaço ao fim de tantos anos foi um desafio que me propus a abraçar. Abraçar por amor, mas ciente das dificuldades a ele inerentes. A prática, a dedicação, a procura constante pelo saber e a reflecção devem ser uma constante na vida de um professor, para que seja sempre possível melhorar enquanto profissional.

As observações das aulas assistidas revelaram-se uma aprendizagem diária constante. A possibilidade de ver de perto a aplicação de diversas estratégias, foi fundamental. Bem presente na minha memória está a estratégia de, em geometria analítica, a professora utilizar a sala como referência, para que fosse mais fácil para os alunos, a visualização no espaço. Ou a capacidade de alterar as estratégias de ensino, com base nas diferentes características da turma, bem evidenciado entre as duas turmas que acompanhei. Um outro aspeto importante, foi presenciar que em determinados momentos, para que os alunos entendam os conteúdos, por vezes, é preciso alterar o que foi pensado e trabalhado anteriormente. Há situações, que as estratégias pensadas não funcionam. Quando não se conhece os alunos, às vezes pode não ser fácil encontrar o melhor caminho para conseguir chegar até eles. Segundo Ponte, Quaresma e Pereira (2015) são vários os fatores dos quais depende uma boa aula: boa preparação, forte inspiração por parte do professor, e interesse e disponibilidade por parte dos alunos. Os mesmos autores defendem a opinião da necessidade de o professor ter elevada capacidade de improviso, para dar resposta a situações inesperadas. Esta capacidade, conduz à incessante tomada de decisões, perante circunstâncias concretas que se vão colocando.

Fundamental, na minha aprendizagem enquanto observadora, foi percecionar o cuidado que a professora orientadora sempre demonstrou, em garantir que todos os alunos entendiam a matéria. De lhes dizer, repetidamente, que explicaria qualquer conteúdo as vezes necessárias até que todos se mostrassem esclarecidos, desde que apresentassem interesse e empenho na aprendizagem. Observar o rigor que a professora Rosário utiliza, quer na escrita, quer na linguagem foram, também, de extrema importância, contribuindo para o meu crescimento enquanto docente. Muitas vezes, o facto de pensarmos de uma forma quase automática nos conceitos abordados faz-nos aligeirar um pouco a linguagem. No entanto, é necessário que enquanto educadores o façamos da forma mais correta possível, não descurando a linguagem nem a escrita no quadro, a grande referência dos alunos. Esta atitude fez-me ter maior consciência da necessidade de os alunos contactarem com uma correta linguagem matemática. Pela observação em aula, constatei que alunos que habitualmente comunicam corretamente em linguagem matemática, com os colegas, com o professor, ou através da escrita, apresentam maior facilidade em organizar e interligar conteúdos.

Poder estar sentada numa carteira da sala de aula, ao lado dos alunos, mas observando a aula de um ângulo diferente e privilegiado, foi sem dúvida uma oportunidade única. Foi nessa posição que me apercebi claramente das grandes dificuldades que muitos dos alunos apresentam. Da necessidade de apoio constante de que necessitam. Da falta de autonomia da grande maioria dos alunos e em muitos casos, também, da falta de confiança. Sentada ao mesmo nível dos alunos, também, consegui observar as constantes ausências da sala de aula, ainda que estas não fossem físicas. A conversa com os colegas sobre qualquer tema que não a matemática, mexer no telemóvel ou, estar na aula a ouvir música com fones, são atitudes constantes, que muitas vezes não são percecionadas pelo professor e que muitos alunos repetem frequentemente. Esta atitude fez-me refletir nas inúmeras vezes que enquanto futura docente, não vou conseguir controlar tudo o que se passa em sala de aula. Alertou-me para a necessidade constante de estar alerta para várias situações, o que não é de todo tarefa fácil. A indisciplina em sala de aula é de facto um problema com que os professores têm de aprender a lidar e gerir no seu dia a dia. Ao longo do ano letivo foi, também, importante observar que muitas vezes é necessário superar os limites da paciência. Esta outra face inerente à profissão, levou também a professora das turmas acompanhadas, a adotar diferentes estratégias, por exemplo mudanças de lugar dos alunos, para tentar minimizar as situações limites. Contudo, também foi importante observar que, por vezes, há opções que têm de ser tomadas em sala de aula e a partir do momento em que o são, devem ser mantidas em consciência e sem hesitação.

Para além da observação das aulas lecionadas pela professora orientadora, as aulas lecionadas por mim, foram sem dúvida momentos de grande aprendizagem. Todos eles tiveram o meu maior empenhamento, desde o momento em que começavam a ser preparadas, até ao momento de discussão da aula com a Professora Rosário e a Professora Maria Helena.

Ponte, Quaresma e Pereira (2015) realçam a importância de uma preparação adequada da aula. Uma preparação que proporcione, os elementos capitais para desenvolvimento da aula que, posteriormente, possam ser adaptados de acordo com as necessidades e o rumo da aula. A elaboração de planos de aula desempenha um papel central na preparação, realização e análise de uma aula. Os mesmos autores distinguem dois aspetos principais num plano de aula: o que é comum a toda a aula e a sucessão de atividades que se desenvolvem durante a aula. Relativamente ao que é comum a toda a aula consideram: (1) objetivos de aprendizagem para a aula; (2) estratégia geral; (3) estrutura da aula; (4) recursos a usar. No que concerne à sucessão de atividades que decorrem durante a aula, devem ser consideradas: (1) as tarefas e atividades de aprendizagem, os modos de trabalho dos alunos e a definição dos momentos para a discussão coletiva; (2) duração prevista para cada momento; (3) atividade dos alunos e possíveis dificuldades; (4) avaliação dos alunos, a ter em atenção durante a aula.

No meu caso pessoal, o plano de aula afigurou-se como uma ferramenta essencial na prática pedagógica. Todas as aulas que lecionei tiveram como suporte o plano de aula elaborado. Nem sempre foi fácil chegar a uma estrutura que fosse adequada e equilibrada. Para tal, muito contribuiu as discussões prévias de algumas questões que iam surgindo aquando da sua elaboração. Todo o tempo dedicado à elaboração do plano de aula foi enriquecedor, pois permitiu-me pensar em cada etapa e prever alguns possíveis obstáculos (embora muitas vezes ocorressem em aula situações completamente inesperadas). Esta construção levou também à pesquisa de literatura variada e à busca de exemplos que fossem adequados, mas também pertinentes. Que permitissem aos alunos perceber, também, em sala de aula a ligação entre os vários conteúdos. Notei que por vezes, mais no início, pensava em exercícios de aplicação que me pareciam adequados, mas que nas discussões com a professora orientadora, verifiquei serem demasiado difíceis ou ambiciosos para os alunos em questão. A elaboração do plano de aula, também, me levou a pensar antecipadamente, nos objetivos, na forma de estruturar a aula de acordo com as características da turma, bem como na forma como me deveria dirigir aos alunos em aula, e nos recursos necessários. Um dos pontos mais difíceis na elaboração dos planos de aula, prendeu-se com o tempo previsto para cada momento na sequência delineada. Ao passar à prática, na maioria das vezes, os alunos apresentaram dúvidas que não eram de todo esperadas, levando à necessidade de dedicar mais tempo a cada momento. Também, os tempos previstos para resolução de exercícios foram amplamente superados. Tal deveu-se, essencialmente, à pouca autonomia dos alunos. Foi mais notório na turma do 9.º ano, onde a maioria dos alunos não queria trabalhar, mostrando total desinteresse pelas matérias lecionadas. No entanto, destaco a importância que a elaboração do plano teve no momento de lecionação. Embora, durante todo o ano, fosse sempre complicado gerir interiormente o momento de lecionação da aula, o facto de ter o plano como suporte, incutia-me uma outra segurança. É verdade que muitos fatores influenciam o nosso modo de estar e agir. Contudo, o facto de ter pensado e refletido, anteriormente, durante o trabalho de preparação, concedeu-me uma maior capacidade de ajustar o plano em função das aulas, à forma como estas decorrem e indo ao encontro das necessidades dos alunos. Conferiu-me uma confiança para conseguir, em muitos momentos, fazer diferente do que inicialmente tinha pensado.

A análise final com a Professora Rosário Lopes e a Professora Maria Helena Santos foram, também, fundamentais para o meu crescimento e aprendizagem. As suas críticas minuciosas, com as quais concordei na generalidade, levaram-me a refletir na forma como podia melhorar muitos aspetos. Também, as suas sugestões a meio dos tempos letivos, me elucidaram e auxiliaram na condução do resto da aula. Antes das aulas lembrava-me muitas vezes dos comentários feitos anteriormente e refletia a forma como poderia colmatá-los. Por vezes, acho que o efeito não foi muito benéfico, mas isso relacionou-se com a minha forma de gerir a situação. Acusei, por vezes, a pressão do momento não conseguindo superar, totalmente, aquilo a que me tinha proposto.

Não queria deixar de referir a importância das aulas consecutivas que tive oportunidade de lecionar. Essas aulas, permitiram refletir sobre os aspetos menos positivos do processo pedagógico. Possibilitaram, a partir da reflexão, que em aulas seguintes essas falhas fossem acauteladas. A reflexão assume um papel fulcral na aprendizagem contínua, que realizei ao longo do estágio pedagógico.

Para além disso, também foi importante, aquando da realização do estágio pedagógico, assistir a algumas aulas lecionadas pelos colegas de estágio. Nesses momentos, revia-me um pouco a mim mesma. A inexperiência em estar em frente a uma turma de alunos tão jovens e na maioria das vezes tão indisciplinados, era comum a todos os estagiários. O receio que não corresse bem. Mas, ao mesmo tempo, saber que não estamos sozinhos, que caminhamos lado a lado. Que os outros sentem as mesmas dificuldades que nós. Que aprendemos uns com os outros e tornamos as aprendizagens mais ricas quando partilhamos com outros.

Em suma este ano de estágio pedagógico, foi um ano de crescimento a nível pessoal e profissional. Permitiu-me colocar em prática as minhas capacidades e aprendizagens enquanto professora. Possibilitou a partilha de conhecimento, discussão e reflexão de diferentes abordagens. Aguçou o sentido de estar mais alerta para os alunos, para tudo o que se passa em sala de aula. Realçou a necessidade, nada fácil, de garantir atenção a todos e a atenção de todos. Foi um ano, em que construí as ferramentas essenciais, para abraçar a profissão de professora do 3.º Ciclo e Ensino Secundário. Além disso, abriu-me horizontes no caminho futuro que quero pautar por um ensino sólido e rigoroso da matemática, mas também pela alegria de ensinar.

Parte II - Investigação

Influência da calculadora gráfica no processo de demonstração

1. Introdução

1.1. Motivação e Pertinência do Estudo

A motivação para a realização deste estudo surgiu essencialmente de dois fatores: a utilização da tecnologia em ambiente de sala de aula, como meio facilitador, potenciador e motivador da aprendizagem em Matemática e a importância que a demonstração tem em Matemática e na sua compreensão.

É verdade que existem vários trabalhos que aliam a utilização da tecnologia e a demonstração, como é o caso dos realizados por de Villiers (2001), Machado (2006) e Amado, Sanchez e Pinto (2015). No entanto, quase todos eles são realizados na área de geometria. A realização de um estudo deste tipo no âmbito das funções pareceu-me, não só interessante, mas também desafiante.

A ideia que tenho é que a maioria dos alunos, toma como certo qualquer resultado que seja verificado para um conjunto de exemplos. Não consideram a demonstração necessária, não se questionam porque tem de ser feita e não a entendem, na maioria das vezes. Parece-me importante, que os alunos percebam que um resultado que parece ser verdadeiro para um dado número de exemplos, não pode ser necessariamente generalizado até à sua demonstração. Eles devem sentir e perceber a necessidade de demonstração.

Enquanto estudante do ensino secundário, poucas demonstrações me lembro de terem sido feitas em sala de aula. E quando o professor as fazia, eram passadas para o caderno sem que a maioria dos alunos entendesse, ou se esforçasse por entender, o significado do que estava por detrás daqueles números e letras. Também, não eram promovidos muitos momentos ou atividades que possibilitassem uma interpretação/assimilação pelo aluno, o que dificultava bastante o entendimento dos conteúdos subjacentes.

Muitos alunos, não estão habituados a questionar os resultados, nem sequer estão motivados para os perceber. Assumem uma postura passiva, adotando a preconceção de que a Matemática é muito difícil, e nem sequer vale a pena tentar entender. Estas atitudes, com as quais os professores se debatem todos os dias são, frequentemente, provocadas e/ou desculpadas pelos próprios pais que, muitas vezes, tentam influenciar o que se passa em sala de aula, não responsabilizando, nem motivando os seus educandos; atribuindo-lhes imaturidade para determinados tipos de raciocínios lógicos e interligações entre conteúdos. Mas, na realidade, o dilema que os estudantes têm com a demonstração não me parece estar relacionado com falta de aptidão no raciocínio lógico, pois todos são capazes de argumentar quando pretendem defender alguns dos seus pontos de vista.

Parece-me essencial que a demonstração Matemática esteja presente no currículo desde cedo, mesmo que com pouca formalidade e que ganhe um carácter mais formal ao nível do ensino secundário. Parece-me esse percurso o mais adequado, para que os estudantes possam compreender a Matemática de modo mais aprofundado.

Por outro lado, os interesses dos alunos de hoje são muito diferentes dos alunos de há 30 anos. Atualmente, os alunos esperam que a escola e os métodos de ensino consigam ir de encontro às suas expetativas e acompanhem também a evolução da ciência. Vivemos na era digital. Todos nós e os alunos, em particular, estamos permanentemente rodeados de ferramentas digitais e tecnologias que abrangem, por exemplo, *software* matemático e dispositivos como calculadoras gráficas, que é possível utilizar como ferramenta de aprendizagem e que podem oferecer experiências aliciantes. A utilização deste tipo de recursos deve ser vista, não só como meio facilitador do cálculo, mas essencialmente como contributo para o desenvolvimento crítico e científico dos alunos, permitindo-lhes fazer conjeturas através da observação de casos concretos.

Do meu ponto de vista, as potencialidades das novas tecnologias e a sua utilização em contexto de sala de aula facilitam a investigação e experimentação na Matemática. Permitem que os alunos tenham um papel mais ativo na construção do seu próprio conhecimento, permitindo explorações mais substanciais, com o objetivo de desenvolver a sua intuição e a sua consciência dos conteúdos da Matemática.

No caso concreto, a calculadora gráfica permite aos alunos trabalhar com inúmeros gráficos de funções de uma mesma família, admitindo a manipulação de parâmetros e a exploração de algumas das suas propriedades. Partindo da visualização gráfica, é possível intuir e fazer conjeturas que carecem, naturalmente, de ser demonstradas.

Nada melhor que a visualização concreta, para intuir e questionar o que à primeira vista pode ser tomado como verdadeiro. Espero que a utilização da tecnologia, neste caso, a calculadora gráfica, surja para os alunos como uma mais-valia indiscutível, no processo de descoberta e também, na sistematização dos resultados e que auxilie na passagem do exemplo à concretização da demonstração.

A importância da demonstração nas aulas de Matemática, bem como importância da sua integração a nível curricular, tem sido abordada por vários autores. A demonstração permite aos alunos, compreender a natureza da matemática, mesmo que, inicialmente, passem por uma fase de descoberta e experimentação (de Villiers, 2004; Hanna, 1996; 2000). Demonstração é, segundo Hanna (1996), um argumento transparente usado para validar uma afirmação cujas funções principais são promover a compreensão e convencer. Já de Villiers (2001) nomeia as funções da demonstração na matemática e discute-as relativamente à sua utilização em sala de aula. A integração da demonstração nos currículos, é justificada essencialmente pelo papel que esta pode ter na promoção da compreensão matemática (de Villiers, 2001; Hanna, 2000; Hersh, 1993). Hersh (1993) argumenta mesmo que, no contexto da aula de Matemática, os alunos não necessitam da demonstração para ficarem convencidos, mas sim para explicar e compreender porque é que um teorema é verdadeiro. Também, segundo Freitas (2011), a demonstração dá um nível de certeza e coerência aos resultados apresentados, que não pode ser adquirido de nenhuma outra forma. O mesmo autor, defende que o tópico das funções é propício ao desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, favorecendo a formalização de demonstrações. Por seu lado, o Programa e Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2013) indica que a calculadora gráfica, pode ser usada para ilustrar propriedades de gráficos de funções ou para uma "abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir" (p. 29). Rocha (2015) indica que a utilização da tecnologia em sala de aula, permite que os alunos realizem trabalho de natureza investigativa ou exploratório possibilitando experimentar diferentes relações matemáticas e formular conjeturas. A mesma autora, adverte para o facto da utilização da tecnologia permitir a observação de vários casos, e assim poder conduzir à convicção da veracidade da conjetura formulada e desta forma, a demonstração matemática poder ser facilmente dispensável. Contudo, Lourenço (2002) afirma que a tecnologia, nomeadamente softwares educacionais, além de proporcionarem a exploração de resultados, incentivam a execução de investigações e "podem sugerir caminhos para a realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão" (p. 105).

Considerando, também, que a investigação que alia a demonstração e a utilização de novas tecnologias, tem sido desenvolvida, maioritariamente, no âmbito geometria e não no das funções, justifica a pertinência deste estudo. Parece-me, também, que este tema de investigação apresenta grande atualidade, pela relevância dada, a ambos os temas, na comunidade científica.

1.2. Objetivos e Questões de Investigação

A maioria dos estudantes tem dificuldade em perceber a noção de demonstração e a sua utilidade. Ao longo do tempo, em quase todo o percurso escolar, os alunos estudam Matemática de forma rotineira e por repetição. Aprendem a resolver corretamente equações, a fazer o estudo de determinadas funções, a resolver exercícios e problemas. Poucos são os que conseguem ter sentido crítico relativamente a um resultado que obtêm e são ainda menos, os que conseguem compreender os conceitos teóricos necessários à realização de dada questão.

Sempre que tentamos demonstrar uma dada conjetura, obrigamo-nos a um conhecimento mais profundo e consequentemente a uma melhor compreensão dos conceitos utilizados. Podemos então questionar porque é que, na maioria dos programas escolares, a demonstração não tem sido valorizada? Sendo ela facilitadora da compreensão dos conteúdos, porque não sentem os alunos a necessidade da demonstração?

Os programas de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2012) e para o Ensino Secundário (MEC, 2013), atualmente em vigor, vieram tentar colmatar esta falha. O programa para o ensino básico, já é bastante ambicioso, ao nível do 3.º ciclo, principalmente, quando comparado com o anterior, em que apenas o teorema de Pitágoras era de demonstração obrigatória. No entanto, a entrada em vigor das aprendizagens essenciais, voltou a dar menos ênfase à realização de demonstrações em sala de aula. Contudo, pode ler-se:

> Deve ter-se em atenção que não é indiferente o modo como se ensina Matemática. Os estudantes devem ter oportunidades de descobrir, raciocinar, provar e comunicar Matemática. Para isso é fundamental que os estudantes se envolvam em discussões e atividades estimulantes e que não se sobrevalorizem as competências procedimentais sem a compreensão dos princípios matemáticos subjacentes. (DGE, 2018, p. 3)

No entanto, nenhuma das palavras "provar" ou "demonstrar" aparece em outra parte do texto que constitui o documento das aprendizagens essenciais. No tópico programático de funções é dado especial ênfase à modelação. Cabe ao professor, caso ache relevante, inserir a demonstração de muitos dos resultados e incutir nos alunos a importância e a necessidade da demonstração. Promover a utilização da calculadora gráfica, aproveitando as suas potencialidades na descoberta ou elaboração de conjeturas de propriedades Matemáticas, pode ser uma forma aliciante de suscitar a necessidade da demonstração, pois permite alertá-los para a necessidade de compreensão Matemática e para a importância da validação dessas mesmas descobertas.

Neste estudo, um dos objetivos é aferir o conhecimento empírico que os alunos têm de demonstração matemática e qual a relevância que lhe atribuem. Tem também como objetivo estudar a capacidade de demonstração matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade, num contexto de utilização da calculadora gráfica.

De modo a cumprir os objetivos, pretende-se responder às seguintes questões:

1. Qual o entendimento que os alunos têm de demonstração? Qual a importância que lhe atribuem?
2. De que modo os alunos formulam conjeturas? E de que forma o raciocínio que desenvolvem se relaciona com a utilização da calculadora gráfica na sua atividade com funções?
3. Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica, sobre o processo de demonstração desenvolvido pelos alunos?

1.3. Organização do Relatório de Investigação

O presente relatório está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo onde é relatada a motivação e pertinência da investigação desenvolvida, bem como as questões de investigação. No capítulo dois, é apresentado o estado da arte sobre a definição e funções da demonstração, o raciocínio indutivo e dedutivo e também, sobre a utilização das novas tecnologias em sala de aula e a sua relação com a demonstração. No capítulo seguinte, é realizado um enquadramento da metodologia, referem-se os critérios de seleção dos participantes na investigação, e as estratégias de recolha e análise de dados. No quarto capítulo, é efetuada a análise dos cinco estudos de caso realizados. No quinto e último capítulo são apresentadas as conclusões do estudo, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2. Revisão de Literatura

A investigação em educação Matemática tem crescido muito nas últimas décadas (Serrazina, 2017). Consequentemente, esse crescimento, também, se reflete no estudo da demonstração em educação Matemática (Reid & Knipping, 2010). A demonstração, embora reconhecida como um conceito difícil de ensinar e de aprender em todos os níveis de educação, tem uma importância inegável na aprendizagem da Matemática pelos alunos (Stylianides & Stylianides, 2017) e é considerado importante para os alunos em todos os níveis de ensino (Ponte, Mata-Pereira, & Henriques, 2012). No entanto, a valorização da presença da demonstração Matemática em todos os níveis escolares é recente e ainda não é uma realidade nas escolas (Rocha, 2019). Embora a demonstração seja fulcral no desenvolvimento do conhecimento matemático e alicerce a comunicação do mesmo, esta não assume um papel central na Matemática escolar (Rocha, 2019).

A utilização das novas tecnologias no processo de ensino aprendizagem permite muito mais que a realização de cálculos complexos de forma rápida, proporciona múltiplas visualizações de problemas concretos, bem como testar e refutar conjeturas falsas (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007). A possibilidade de exploração em sala de aula das potencialidades das tecnologias, permite ao professor criar tarefas que envolvam pesquisas, em articulação com diferentes conteúdos e demonstrações (Zbiek *et al.*, 2007).

Neste capítulo é apresentada a revisão da literatura relacionada com o tema da investigação, onde a demonstração em Matemática escolar, bem como, a utilização da tecnologia, ocupam papel de destaque.

2.1. Entendimento de Demonstração Matemática

A demonstração está na base do conhecimento e compreensão da Matemática (Rocha, 2018). Não é possível saber se uma dada proposição Matemática, é verdadeira ou falsa até ser demonstrada ou refutada. Segundo Hanna e de Villiers (2008), a demonstração está no coração da Matemática, embora a relevância, bem como, os padrões de rigor com que é efetuada, tenham sofrido alterações ao longo dos tempos.

Mas o que é, ou pode ser considerado uma demonstração? A resposta a esta questão não é única sendo vários os autores que se têm debruçado sobre ela.

Davis e Hersh (1995, p. 150) afirmam que "demonstração é a energia da Matemática, a corrente elétrica que dá vida aos enunciados estáticos dos teoremas. (…) é um ritual e uma celebração da força da razão". Segundo Hersh (1993) podem distinguir-se dois significados distintos de demonstração, um informal e outro formal. No primeiro caso, a demonstração Matemática é um argumento convincente, "julgado por juízes qualificados" (Hersh, 1993, p. 389). No segundo caso, assente num vocabulário mais formal, a demonstração é constituída por transformações de sequências simbólicas formais, de acordo com determinadas regras da lógica.

Hanna (1996) vai mais longe, afirma que demonstração é um argumento transparente que valida uma afirmação, mas que para além dessa função tem uma outra mais importante, a de promover a compreensão. Segundo Boavida (2001, p. 11) "uma boa demonstração é aquela que, para lá de convencer, explica e faz avançar na compreensão de uma ideia, problema ou resultado matemático, é aquela que clarifica porque é que uma relação funciona ou não". Também, Davis e Hersh (1995) associam a demonstração à descoberta e compreensão dos conteúdos matemáticos, referindo que "o caminho para a compreensão é o caminho original da descoberta (…), a melhor maneira de compreender é reconstruir a demonstração por nós próprios" (Davis & Hersh, 1995, pp. 263-264). A abstração, a formalização, a axiomatização e a dedução são "os ingredientes mágicos da demonstração" (Davis & Hersh, 1995, p. 148).

Reid e Knipping (2010) afirmam que atualmente muitos podem pensar que o significado de "demonstração" já vem desde Euclides, assentando em princípios da lógica (começa com axiomas para em seguida demonstrar teoremas). No entanto, citando Wilder (1981), estes autores indicam que a "demonstração em Matemática é determinada culturalmente, tendo uma perspetiva relativa. Ou seja, o que constitui demonstração para uma geração, pode falhar nos padrões da próxima geração ou de alguma geração posterior" (p. 3). Os mesmos autores referem ainda que "ao explorar essa variação, podemos descobrir outras maneiras de perceber uma demonstração e outras formas de demonstrar" (p. 3).

A dificuldade em definir demonstração é possível de vivenciar através de um diálogo transcrito de "A Experiência Matemática" de Davis e Hersh (1995, pp. 53-54). O diálogo decorre entre um aluno de Filosofia e o que os autores designam por Matemático Ideal (o MI - o matemático mais parecido com o matemático típico):

Aluno: Professor, o que é uma demonstração Matemática? (…)

MI: Bem, foi tudo esclarecido pelo lógico Tarski, creio, e por alguns outros, talvez Russell ou Peano. De qualquer maneira, o que se faz é escrever os axiomas da teoria numa linguagem formal com uma dada lista de símbolos ou alfabeto. Escreve-se então a hipótese do teorema no mesmo simbolismo. Depois mostra-se que é possível transformar as hipóteses, passo a passo, aplicando as regras da lógica, até chegar à conclusão. Isso é que é uma demonstração.

Aluno: A sério? É espantoso! Tive cálculo elementar e cálculo avançado, álgebra elementar e topologia e nunca ninguém fez isso.

MI: Ah, é claro que nunca ninguém realmente o faz. Nunca mais acabava! Mostra-se apenas que seria possível e isso chega.

Aluno: Mas nem isso se parece com o que vi fazer nas aulas ou com o que constava nos livros das cadeiras. Portanto, os matemáticos não fazem demonstrações!

MI: É claro que fazemos! Se um teorema não é demonstrado, não vale nada. (…)

Aluno: Então, o que é realmente uma demonstração?

MI: Bem, é um raciocínio que convence alguém que entenda do assunto.

Aluno: Alguém que entenda do assunto? Então a definição de demonstração é subjetiva; depende de certas pessoas. Antes de poder decidir se algo é uma demonstração sou obrigado a decidir quem são os peritos. Que tem isso a ver com demonstrar coisas?

MI: Não, não. Não há nada de subjetivo nisto! Toda a gente sabe o que é uma demonstração...

Ao pensar na demonstração no ensino, é natural voltar a perguntar: "O que é uma demonstração?". Existindo diferentes perceções da noção de demonstração no domínio da Matemática, não é de estranhar que o mesmo ocorra no âmbito da educação Matemática onde a noção de rigor é relativizada (Rodrigues, 2008). Na opinião de Rodrigues (2008), a demonstração no contexto educativo pode assumir um formato distinto do formato no seio do trabalho desenvolvido pelos matemáticos. A demonstração realizada no contexto educativo não tem de seguir os formalismos usuais, no entanto, tem de satisfazer as seguintes condições: (1) generalidade - não basta comprovar empiricamente alguns, ou até muitos, casos particulares; a comprovação deverá aplicar-se a todos os casos possíveis; (2) dedução lógica - feita a partir de resultados conhecidos anteriormente (Rodrigues, 2008).

Em Stylianides (2019) também é possível ler que existem inúmeras perspetivas de demonstração, em Educação Matemática. Salientando-se que o importante não é a adoção de uma definição comum de demonstração, mas sim a especificação clara da definição de demonstração que sustenta a pesquisa, bem como as razões para a sua escolha. No mesmo artigo, o autor invoca a definição de demonstração que adotou na sua pesquisa, exigindo que as demonstrações usem procedimentos de argumentação válidos e que tais procedimentos sejam conhecidos ou conceptualmente acessíveis à comunidade de sala de aula, onde as demonstrações são produzidas:

> *Demonstração* é um *argumento matemático*, uma sequência de proposições interligadas, a favor ou contra uma afirmação Matemática, com as seguintes características:
> 1. Utiliza declarações aceites (*conjunto de declarações aceite*s) pela comunidade de sala de aula que são verdadeiras e acessíveis sem necessidade de justificações adicionais;
> 2. Emprega formas de raciocínio (*modos de argumentação*) que são válidos e conhecidos, ou ao alcance da comunidade da sala de aula; e
> 3. É comunicada com formas de expressão (*modos de representação de argumentos*) que são apropriados e conhecidos, ou ao alcance conceptual da comunidade de sala de aula. (Stylianides, 2007, p. 291, itálico no original)

Rocha (2019) afirma que as demonstrações não se devem restringir a demonstrações formais. Que o modo de argumentar e a simplicidade da linguagem, devem ser adequados ao nível de ensino dos alunos. Além disso, o nível de conhecimento dos alunos deve ser levado em consideração, pelo que, as demonstrações apenas devem envolver argumentos conhecidos dos alunos. Para Machado (2006), independentemente do nível de formalismo, a demonstração deve surgir como algo que se expressa através de um raciocínio lógico, que mostra a verdade ou falsidade de uma dada conjetura. Deve, também, ser aceite por todos os elementos que constituem o grupo de sala de aula.

2.2. Função da Demonstração no Ensino da Matemática

Atualmente é consensual a importância de incluir a demonstração na educação Matemática, existindo uma tendência geral para a integrar no currículo (Marioti, 2006). Como tal, é legítimo questionar qual a função da demonstração. Tal como no significado de demonstração, também, no que que diz respeito às funções da demonstração, existem diferentes opiniões.

De Villiers (2001) atribui à demonstração várias funções e admite que a demonstração pode ser interpretada como um procedimento de: (1) verificação/convencimento - diz respeito à confirmação da veracidade de uma determinada afirmação; (2) explicação - fornece explicações quanto à razão porque é verdadeira; (3) sistematização - organiza os vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas; (4) descoberta - descobre ou inventa novos resultados; (5) comunicação - transmite o conhecimento e compreensão Matemática; (6) desafio intelectual - realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração. O mesmo autor destaca a função de explicação, pois embora seja possível atingir um nível elevado de confiança na validade de uma conjetura através de verificações quase-empíricas, estes processos, normalmente, não dão uma explicação da razão pela qual ela pode ser verdadeira. Contudo, o mesmo autor afirma, que para além das funções que atribui à demonstração, deve ter-se como pré-requisito importante para a procura da demonstração, a convicção de que um dado resultado é verdadeiro. "Por que esquisita e obscura razão gastaríamos, por vezes meses, a tentar demonstrar certas conjeturas, se não estivéssemos já convencidos da sua veracidade?" (de Villiers, 2001, p. 32)

Para além das seis funções que de Villiers atribui à demonstração, Hanna (2000) atribui-lhe mais três funções: (1) construção de uma teoria empírica; (2) exploração do significado de uma definição ou das consequências de uma hipótese assumida; (3) incorporação de um facto conhecido numa nova perspetiva. A mesma autora, refere ainda que em contexto de sala de aula, os alunos começam por lidar com a demonstração nas suas duas funções fundamentais: verificação e explicação. De entre estas duas funções, a autora, bem como Hersh (1993) atribuem uma importância primordial à explicação. O papel da demonstração em Matemática deve ser debatido em sala de aula, destacando a sua importância (Hanna, 2000).

Para Davis e Hersh (1995), a demonstração cumpre em simultâneo vários objetivos: passa por processos de revalidação, sempre que é exposta à análise de uma nova população; a exposição continuada esclarece erros, ambiguidades e equívocos; aumenta o entendimento e sugere nova Matemática, sendo que um principiante se aproxima da criação de nova Matemática sempre que estuda demonstrações.

Reid (2005) aponta o facto de a integração da demonstração no ensino da Matemática poder desenvolver o pensamento crítico dos alunos noutros domínios, mas a sua verdadeira função é a de promover uma melhor compreensão da natureza da matemática. Para Ponte, Mata-Pereira e Henriques (2012) é importante desenvolver argumentação em geral e fazer da demonstração o elemento central da Matemática, desde os primeiros anos de escolaridade. Os autores afirmam que o estímulo à justificação, a partir dos primeiros anos de ensino, beneficia o desenvolvimento e a passagem de justificações simples a justificações formais e estas, por sua vez, conduzem à realização de demonstrações. No entanto, os mesmos autores admitem que os processos de demonstração não se desenvolvem de uma forma rigorosa e formal, logo a partir dos primeiros anos de ensino.

Ao observarmos os programas em vigor, verifica-se que no ensino básico (MEC, 2012) existe uma unidade dedicada à axiomática da geometria que "constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos" (p. 19). Já no Programa e Metas para o Ensino Secundário (MEC, 2013) é referido que "os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas" (p. 6) e de usar a intuição e o raciocínio indutivo. O mesmo documento alerta para a necessidade de os alunos reconhecerem que o raciocínio indutivo não é apropriado para fundamentar propriedades. Em oposição ao raciocínio dedutivo, o raciocínio indutivo pode conduzir a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras (MEC, 2013).

Sempre que os alunos sentem necessidade de fazer uma demonstração, então ela ganha sentido. Usualmente, esta necessidade decorre de uma conjetura formulada. Cabe ao professor aproveitar estas oportunidades e motivar os alunos para o tentarem fazer. Tal facto, proporciona aos alunos o aprofundamento da sua compreensão da Matemática (Boavida, 2001).

Hanna (2000) defende que o papel da demonstração ao nível do ensino da Matemática deve ser o de promover a compreensão. As representações visuais dos argumentos baseados na observação, os raciocínios e as provas exploratórias, são fundamentais para promover uma compreensão da Matemática em geral e da demonstração em particular.

2.3. Raciocínio Indutivo e Dedutivo

O raciocínio está na base da compreensão da Matemática. Davis e Hersh (1995) salientam a importância de vários processos de raciocínio matemático. Destacam o processo de abstração na compreensão dos símbolos matemáticos. Evidenciam a generalização como modo de consolidar conhecimentos, a formalização da linguagem de forma a suprir necessidades de um propósito intelectual, e a demonstração como meio facilitador de conhecimento e de compreensão, enfatizando deste modo o raciocínio dedutivo.

Pólya (1954) refere que a Matemática é o domínio do conhecimento onde se usa o raciocínio dedutivo, mas não deixa de salientar a relevância do raciocínio indutivo. Muitas vezes, os processos de indução têm origem na observação, a partir da qual se desenvolvem conjeturas a testar posteriormente. Segundo o mesmo autor a generalização, a especialização e a analogia são outros processos importantes no raciocínio indutivo, que ocorrem usualmente durante a resolução de problemas matemáticos. O raciocínio indutivo leva a considerações prováveis baseando-se, sobretudo, na observação. "Neste sentido, o raciocínio indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, sem conduzir a conclusões necessárias, mas com um papel chave na criação de novo conhecimento” (Ponte *et al.*, 2012, p. 357). Por de trás da formulação da conjetura desenvolve-se um processo de exploração, compreensão do problema em causa, investigação de casos concretos e capacidade de generalização de resultados. Este processo de raciocínio matemático deve ser valorizado (Brocado, 2001). Estamos perante raciocínios pelos quais se cria Matemática. Para formular as primeiras conjeturas é importante começar por analisar exemplos particulares. À medida que se realizam mais experiências, as primeiras conjeturas começam a ser refutadas e reformuladas (Brocado, 2001).

Relacionado com as demonstrações está o raciocínio dedutivo. Este tipo de raciocínio é mais formal e é o mais característico da Matemática (Ponte *et al.*, 2012). Consiste em partir de uma hipótese e deduzir lógica e rigorosamente uma conclusão (Brocado, 2001).

É necessário que os professores promovam a formulação de conjeturas bem como a sua discussão, para que os jovens aprendam a utilizar o raciocínio indutivo e dedutivo. Desta forma, é possível que os alunos se familiarizem com processos de raciocínio, como a formulação de uma conjetura, o teste desta conjetura e a apresentação do raciocínio utilizado (NCTM, 2007). À medida que os alunos avançam no nível de escolaridade, o grau de formalismo associado à demonstração Matemática deve ir aumentando.

Os Programas e Metas Curriculares para o Ensino Secundário (2013) e para o Ensino Básico (2012), também, fazem referência ao raciocínio matemático. Estes documentos referem que, embora o raciocínio indutivo desempenhe um papel fundamental na atividade Matemática, o raciocínio dedutivo é o tipo de raciocínio primordial em Matemática e o ensino da Matemática deve permitir que os alunos o reconheçam como tal.

> (…) os alunos devem ser capazes de utilizar a intuição e o raciocínio indutivo baseado em padrões e em regularidades com vista à resolução de problemas não rotineiros, frisando que estes problemas exigem recursos cognitivos acima dos necessários à resolução de problemas rotineiros (…) No entanto (…) os alunos deverão saber que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjeturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las a posteriori. (MEC, 2013, p. 7)

No entanto, é reconhecido que a aprendizagem da Matemática, nos primeiros anos escolares, deve partir do concreto sendo a passagem ao abstrato, que deve ser feita de forma gradual, respeitando os tempos de cada aluno e promovendo o rigor que é característico à Matemática, um dos propósitos do ensino desta disciplina (MEC, 2012). Assim, a aula de matemática deve funcionar como lugar de criação, envolvendo a dinâmica investigativa, favorecendo a expressão do pensamento inferencial associado à criação de conhecimento matemático, ainda que informal (Oliveira, 2002). Pois, “aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino)" (Braumann, 2002). E segundo Ponte e Matos (1996) as investigações Matemáticas envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenho e criatividade por parte do aluno. Os mesmos autores indicam quatro fases no desenvolvimento do raciocínio: (1) definição do objetivo - reconhecimento e exploração uma situação problemática e formulação de questões a estudar; (2) idealização e realização de experiências - definição de estratégias e condução das experiências; (3) formulação de conjeturas - definição de regras a propor; (4) teste das conjeturas - validação das conjeturas e avaliação do raciocínio ou o resultado do raciocínio.

2.4. Raciocínio Dedutivo e Funções

O conceito de função é um dos conceitos mais importantes no domínio da Matemática (Saraiva, Teixeira, & Andrade, 2010). É considerado uma poderosa ferramenta para representar e interpretar variados fenómenos quer naturais, quer resultantes da ação humana em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo na engenharia, biologia, economia, entre outras (Rodrigues, 2016). No entanto, a maioria dos alunos revelam muitas dificuldades quando tentam compreendê-lo (Saraiva *et al.*, 2010). Trabalhar com gráficos cartesianos e expressões algébricas não é uma tarefa fácil, para muitos (Ponte, 1992). Existe mesmo a tendência de muitos alunos identificarem o conceito de função, apenas com uma das suas representações, Sfard (1991).

Para tentar minimizar as dificuldades sentidas pelos alunos, Sfard (1991), sugere que o estudo das funções deve ser iniciado através da ideia de dependência entre variáveis e só mais tarde deve ser introduzida a definição de função. Por seu lado Ponte (1992) propõe que o ensino de funções articule, de um modo equilibrado, a representação numérica, gráfica e algébrica. Defende, também, que o estudo das funções deve iniciar com exemplos, em que exista uma expressão algébrica. Este autor refere também que o estudo das características das funções a partir dos seus gráficos cartesianos pode contribuir para uma aprendizagem significativa, por parte dos alunos. Também, Saraiva *et al*. (2010) defendem que a aprendizagem das funções, deve ser concretizada através das representações distintas de funções (numérica/tabular; algébrica; gráfica; linguagem natural), pois diferentes representações do mesmo conceito proporcionam a observação de relações importantes, conduzindo a uma compreensão profunda do conceito.

Sfard (1991) refere que é necessário compreender o processo de desenvolvimento do conceito de função para analisar o raciocínio matemático na aprendizagem do mesmo. Segundo a autora, na origem da maioria dos conceitos matemáticos é possível encontrar duas formas de pensamento matemático: (1) conceção operacional, onde as noções são criadas como um produto de certos processos, ou são identificadas com os próprios processos - a função é um processo computacional ou um método para obter um valor a partir de outro valor dado; (2) conceção estrutural, onde as noções são tratadas como objetos matemáticos - a função é um conjunto de pares ordenados. Estas duas formas de entender funções, funcionam aparentemente de forma independente, mas são na realidade complementares, constituindo uma unidade coerente.

Sfard (1991), a partir da dualidade processo-objeto, que considera estar na formação da maioria dos conceitos matemáticos, propõe um modelo de desenvolvimento conceptual: Teoria da Reificação. Neste modelo, surge em primeiro lugar a conceção operacional que, por meio da interiorização dos processos, evolui para uma conceção estrutural. Assim, em primeiro lugar, adquire-se o conceito de função operacional e mais tarde assume-se a forma estrutural da interiorização dos processos. Esta transição, das operações para os objetos abstratos, é um processo longo e difícil e realiza-se, de acordo com Sfard (1991), em três etapas: (1) interiorização – fase de familiarização com os processos que, eventualmente, vão dar origem ao novo conceito; (2) condensação - fase em que se desenvolve a capacidade de pensar sobre um dado processo como um todo, estabelecendo comparações, generalizações e alternando entre diferentes representações de um conceito - é o momento "oficial" de nascimento do novo conceito; (3) reificação - quando o aluno consegue ver a nova entidade Matemática como um objeto completo e autónomo com significado e ocorre de forma instantânea. Após a reificação, o conceito pode servir de base à formação de novos conceitos de nível superior. Neste modelo, não é possível alcançar uma etapa posterior, sem que, a anterior tenha sido ultrapassada.

No caso do estudo de funções, o aluno encontra-se na fase de interiorização quando aprende a noção de variável e adquire a capacidade de usar uma expressão algébrica para determinar valores da variável dependente. Nesta etapa, os processos são realizados em objetos matemáticos, já conhecidos. Por sua vez, quando o aluno se encontra na fase de condensação consegue investigar funções, representá-las graficamente e efetuar várias operações com funções. A facilidade com que alterna entre a diferentes representações, indica a evolução do aluno nesta etapa. A fase de reificação ocorre quando o aluno revela consciência das diferentes representações de uma função e consegue passar de uma representação para outra com facilidade, quando for capaz de resolver equações funcionais, quando mostra "capacidade de falar sobre propriedades gerais de diferentes processos realizados com funções (tais como composição ou inversão) e pelo derradeiro reconhecimento de que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções" (Sfard, 1991, p. 20).

O processo de reificação é difícil de atingir, mas quando é alcançado, facilita a realização matemática – diminui a dificuldade e aumenta a manipulabilidade – pelo que deve ser estimulado junto dos alunos (Mourão, 2002).

2.5. Novas Tecnologias no Ensino da Matemática

O desenvolvimento das novas tecnologias, bem como a possibilidade da sua utilização nas salas de aula permitiu uma nova abordagem da Matemática. De acordo com Amado, Sanchez e Pinto

(2015) a aplicação adequada destes recursos, proporciona aos alunos a realização de explorações, investigações, formulação de conjeturas e consequentemente, a aquisição e consolidação de conhecimento. Os mesmos autores sugerem que

> os alunos podem e devem combinar o trabalho apoiado no uso de tecnologias com o trabalho baseado em papel e lápis, de modo a construírem uma aprendizagem assente numa compreensão mais profunda e sólida dos conceitos, que possa ser geradora de maior motivação, autoestima e empenho. (p. 640)

Ao introduzir as novas tecnologias na aprendizagem e compreensão da Matemática devem considerar-se dois aspetos distintos: o sintático e o semântico (Meissner, 1983). O aspeto sintático refere-se ao conhecimento das teclas ou procedimentos necessários para operar com a máquina. Por sua vez, o aspeto semântico vai muito mais além e refere-se à compreensão do problema proposto, onde a máquina serve como meio facilitador ou simplificador de situações que exijam cálculos, desenho de figuras ou manipulação das mesmas (Meissner, 1983). Fernandes e Vaz (1998), também, apontam para a promoção de uma aprendizagem mais profunda e significativa, através de utilização de tecnologias nas aulas de Matemática, indicando que estas ferramentas favorecem uma abordagem indutiva ou experimental da Matemática e potenciam as suas aplicações. Ponte (1995) enuncia considerações favoráveis à utilização das novas tecnologias na aula de Matemática: (1) uma relativização da importância das capacidades de cálculo, que podem agora ser realizadas mais rápida e eficientemente; (2) um reforço do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação; (3) uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações Matemáticas; (4) um crescendo de interesse pela realização de projetos, atividades de modelação, investigação e exploração pelos alunos, como parte fundamental da sua experiência Matemática; (5) uma demonstração prática da possibilidade de envolver os alunos em atividades Matemáticas intensas e significativas.

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2007), reconhecem, pelo Princípio da Tecnologia, que as tecnologias proporcionam imagens visuais das ideias Matemáticas, sob múltiplas perspetivas facilitando a exploração e análise de numerosos exemplos e diferentes formas de representação. O mesmo documento indica que a utilização da tecnologia no ensino da Matemática melhora a aprendizagem dos alunos; que o trabalho que desenvolvem permite ao professor observar e recolher informação sobre os processos de raciocínio dos alunos. Também, o programa e metas de Matemática A (2013), atualmente em vigor, refere que a tecnologia deve ser "aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações Matemáticas e para o exercício de certos procedimentos. Essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa (…) não pode, pois, substituir a compreensão conceptual" (p. 28).

Subtil e Domingos (2018) indicam que o desempenho dos alunos de diferentes níveis de rendimento, especialmente alunos com necessidades educativas especiais, beneficia da introdução da calculadora gráfica. Aumento da motivação, envolvimento, cooperação, oportunidades de aprendizagem *hands-on*, confiança e capacidades tecnológicas dos alunos são alguns dos benefícios apontados pelos autores à sua incorporação no ensino da Matemática.

Segundo Amado *et al.* (2015) a execução de experiências com recurso à tecnologia permite verificar um número elevado de vezes, num curto espaço de tempo, determinada propriedade, favorecendo a formulação de conjeturas. Os mesmos autores salientam que, por vezes, há situações em que a ocorrência de contraexemplos ajuda a refutar conjeturas pré-estabelecidas. Quando não surgem contraexemplos os alunos assumem a veracidade de um resultado, tornando-se essencial, que daí resulte o desafio de perceber a razão dessa veracidade (de Villiers, 2001). Amado *et al.* (2015) referem, também, que aquando da utilização da tecnologia, a demonstração não é um requisito necessário para convencer os alunos da verdade, mas sim um meio para compreender os resultados matemáticos. Segundo Rocha (2015), a análise de diversos casos, com apoio na tecnologia, pode originar a assunção e validação dos resultados, por parte dos alunos, sem que estes sintam a necessidade de demonstrar as conjeturas que formulam. Também, de Villiers (2001) tem opinião semelhante, afirmando que quando os alunos investigam com cuidado uma conjetura geométrica por meio de uma variação continua, com um *software* como o *sketchpad*, têm pouca necessidade de adquirir maior convicção ou de proceder à sua verificação. Cabe ao professor provocar um novo estado de curiosidade no aluno (de Villiers, 2001).

Também, Hanna (2000) refere o grande potencial do uso de *software* dinâmico quer por estimular a exploração, quer pela facilidade de construir e consequentemente, testar e demonstrar conjeturas. A autora atende também à capacidade de os alunos refletirem e oferecerem argumentos válidos quando se confrontam com a incerteza. Compreendem as limitações das abordagens informais e sentem a necessidade da demonstração. Contudo, também esta autora, alerta para o risco de a demonstração dedutiva ser subestimada ou mesmo abandonada, a favor de uma abordagem inteiramente experimental. Argumenta ainda a favor da exploração Matemática com recurso à tecnologia, mas de forma consistente com a visão Matemática como uma ciência analítica, sendo necessário e importante aliar as duas componentes.

Contudo, Rocha (2015) refere num estudo que desenvolveu sobre "O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia" que "é possível colocar aos alunos situações onde estes se possam aperceber da vantagem de recorrer tanto a abordagens mais formais, como a abordagens mais intuitivas e isto mesmo, quando a tecnologia é uma realidade em sala de aula" (p.32).

3. Metodologia

Este capítulo inicia com uma breve descrição das características da investigação qualitativa, abordando ainda questões de ética que lhe estão subjacentes. Passa depois à especificação do estudo de caso, aborda alguns instrumentos de recolha de dados e termina com os procedimentos metodológicos adotados.

3.1. Investigação Qualitativa

A investigação em educação era inicialmente marcada por práticas de mensuração, testes de hipóteses, estatísticas, entre outras, tendo-se desenvolvido de modo a abarcar uma metodologia onde se destaca a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo dos discernimentos individuais: a investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Esta metodologia teve origem em estudos antropológicos e sociológicos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa em educação teve nas origens antropológicas, Franz Boas com um artigo publicado em 1898, sobre o ensino da antropologia a nível universitário. Já a sociologia contribuiu de forma significativa, para o desenvolvimento da investigação quantitativa, através da "Escola de Chicago"[6].

A investigação qualitativa reúne várias estratégias de investigação, com determinadas características comuns (Bogdan & Biklen, 1994). Segundo Bogdan e Biklen (1994) dados qualitativos são de tratamento estatístico complexo, pois são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas. As questões de investigação são formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural. Os mesmos autores definem cinco características da investigação qualitativa: (1) os dados são recolhidos no ambiente natural, no local do estudo, e o investigador é o instrumento principal nessa recolha; (2) é descritiva - o investigador não reduz os dados a números, tenta analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos; (3) maior interesse pelo processo do que pelos resultados ou produtos; (4) os dados são analisados de forma indutiva - o investigador não reconhece quais as melhores questões no início do estudo, é ao longo do estudo que percebe quais são as questões mais importantes; (5) o significado é extremamente importante - o investigador tenta compreender o sentido que os intervenientes no estudo atribuem às suas experiências.

[6] Nome dado a um grupo de professores e pesquisadores do departamento de Sociologia da Universidade de Chicago, que surgiu nos Estados Unidos nos anos 20 e 30 do século XX

Bogdan e Biklen (1994) abordam, também, uma questão importante a ética, e enumeram quatro princípios pelos quais o investigador qualitativo se deve reger em relação a ela: (1) as identidades dos sujeitos devem ser salvaguardadas; (2) os sujeitos devem ser tratados respeitosamente e de modo a obter a sua cooperação na investigação; (3) o investigador deve ser realista e claro nas negociações com todos os intervenientes e respeitar o acordo até ao fim do estudo; (4) o investigador deve ser fiel aos resultados obtidos, mesmo que estes não sejam os que mais lhe agradam. "Confecionar ou distorcer dados constitui o pecado mortal de um cientista" (p. 77).

3.2. Estudo de Caso

Um estudo de caso é uma forma de investigação que "visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social" (Ponte, 2006, p. 2). Promove a compreensão de uma questão complexa podendo reforçar o que se conhece de pesquisas anteriores e oferece, como vantagem, a aplicabilidade a situações humanas em contextos de vida real atuais (Dooley, 2002). Possibilita uma análise intensiva e pormenorizada da situação em estudo (Coutinho & Chaves, 2002).

Para Ponte (2006), um estudo de caso tem como objetivo entender uma entidade bem definida (pessoa, instituição, disciplina, etc.). Analisa deliberadamente uma dada situação particular procurando descobrir o que há de mais essencial e característico na situação em estudo. "O seu objetivo é compreender em profundidade o 'como' e os 'porquês' dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador" (p. 2). O mesmo autor evoca, também, desvantagens ao estudo de caso, mais especificamente o de não permitir a comparação com outros estudos. Mesmo não permitindo generalizações, o estudo de caso possibilita a formulação de hipóteses que podem, posteriormente, ser testadas em novas investigações (Ponte, 2006).

Bogdan e Biklen (1994) referem que o estudo de caso é um dos métodos mais comuns na investigação qualitativa que, resumidamente, pode definir-se como um estudo detalhado de uma situação, sujeito ou acontecimento. Caracteriza-se por uma abordagem metodológica de investigação, adequada quando se procura compreender, explorar ou descrever determinado fenómeno. Estes autores classificam os estudos de caso, tendo em consideração o número de casos em estudo: estudos de caso único e estudos de caso múltiplos.

> Alguns começam sob a forma de um estudo de caso único cujos resultados vão servir como o primeiro de uma série de estudos, ou como piloto, para pesquisa de casos múltiplos. Outras investigações consistem, essencialmente, em estudos de caso único, mas compreendem observações menos intensivas e menos extensas noutros locais com o objetivo de contemplar a questão da generalização. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 97)

Os estudos de caso podem ter vários propósitos, utilizar grande variedade de instrumentos e estratégias. Podem ser fundamentalmente exploratórios, para obter informação sobre o objeto de interesse; substancialmente descritivos, para descrever o caso em consideração; ou ser analíticos, quando procuram construir ou desenvolver uma nova teoria sobre o objeto de estudo ou compará-lo com uma teoria já existente (Ponte, 1994).

Coutinho e Chaves (2002) identificam cinco características dos estudos de caso: (1) é um sistema limitado, e tem fronteiras em termos de tempo, eventos ou processos, que nem sempre são claras e precisas; (2) é um caso sobre “algo”, que necessita ser identificado para conferir foco e direção à investigação; (3) é preciso preservar o carácter único, específico, diferente, complexo do caso; (4) a investigação decorre em ambiente natural; (5) o investigador recorre a fontes múltiplas de dados e os métodos de recolha são diversificados: observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registros de áudio e vídeo, diários, cartas, documentos, entre outros (Coutinho & Chaves, 2002).

Dependendo das características e procedimentos utilizados no estudo de caso ele pode ser classificado de diferentes modos. Aires (2015) faz referência a seis modalidades distintas de estudos de caso: (1) estudos de casos ao longo do tempo - estudo de um fenómeno, sujeito ou situação a partir de diferentes perspetivas temporais; (2) observacionais - caracterizam-se pelo recurso à observação participante e podem referir-se a diferentes temáticas; (3) estudos de comunidades - consistem na descrição e compreensão de uma determinada comunidade educativa, por exemplo, escolas, agrupamentos, etc.; (4) estudos micro-etnográficos - desenvolvem-se em pequenas unidades organizativas ou numa atividade específica organizativa; (5) estudos de casos múltiplos - estudam dois ou mais sujeitos, situações ou fenómenos e podem adotar diferentes modalidades; e (6) estudos multi-situacionais - aplicam-se no desenvolvimento de uma teoria, exigindo a exploração de muitas situações e sujeitos).

Independentemente da tipologia do estudo de caso, a seleção dos casos é de particular importância. Neste tipo de estudo, a seleção é direcionada, intencional e não de forma aleatória como nos estudos de carácter quantitativo. O investigador escolhe os participantes, de acordo com critérios definidos, procurando a maior variabilidade possível, com objetivo de obter informação máxima (Aires, 2015). Também, Dooley (2002) refere a importância da seleção dos participantes, enfatizando o facto de que esta, deve refletir as questões de investigação.

3.3. Instrumentos de Recolha de Dados

Durante a investigação, a etapa da seleção das técnicas de recolha de dados a utilizar não deve ser depreciada, pois a concretização dos objetivos do trabalho de campo, dependem delas (Aires, 2015). Nos estudos de caso, os métodos e técnicas de recolha de informação visam obter informação suficiente e pertinente e o investigador deve recolher e organizar dados de múltiplas fontes, e de forma sistemática (Dooley, 2002).

Bogdan e Biklen (1994), consideram a observação participante, a entrevista não estruturada e a análise documental, como sendo técnicas de recolha de dados mais comuns na investigação qualitativa.

Aires (2015) divide em dois grandes blocos as técnicas de recolha de dados predominantes na metodologia qualitativa: (1) técnicas diretas (que contemplam a observação participante, entrevistas qualitativas e histórias de vida); (2) técnicas indiretas (onde se incluem documentos - diários, cartas, etc., e documentos oficiais - registos documentos internos, dossiers, estatutos, registos pessoais, etc.).

Segundo Meirinhos e Osório (2010), o caso em estudo, o seu contexto, o problema, as proposições e as questões orientadoras, devem ser indicadores para o investigador das melhores técnicas e materiais a selecionar, bem como, da informação a recolher.

De seguida, são abordadas de forma breve, algumas técnicas de recolha de dados, como a observação, questionário, entrevista e análise documental.

3.3.1. Observação

A observação "constitui uma técnica básica de pesquisa" (Aires, 2015, p. 25), onde a recolha de dados é feita por contacto direto com cada situação, de forma sistemática. "A observação científica (…) permite-nos obter uma visão mais completa da realidade de modo a articular a informação proveniente da comunicação intersubjetiva entre os sujeitos com a informação de carácter objetivo" (Aires, 2015, p. 25). Pode ser participante ou não participante, sendo que o método de observação participante é interativo e necessita que o investigador se envolva nos fenómenos que observa (Meirinhos & Osório, 2010). Segundo Gil (2008), a observação participante (ou ativa), consiste na participação real do conhecimento na vida da comunidade, do grupo ou de uma situação determinada. O observador assume o papel de um membro do grupo. Para Yin (2005) a observação participante é uma forma peculiar de observação. O autor considera que o investigador não adota uma posição de observador passivo, podendo assumir uma variedade de papéis no estudo de caso, sendo possível participar em acontecimentos em estudo. De forma oposta, a observação não participante caracteriza-se pela assunção de um papel de observador passivo, por parte do investigador, o observador não participa na vida social do grupo que observa (Aires, 2015). O investigador entra em contacto com o grupo ou comunidade em estudo sem se incorporar nele, apenas participa sem se envolver. Na opinião de Bogdan e Biklen (1994) existe ainda uma situação de alternância entre os dois tipos de observação, uma continuidade entre a observação não participante e a observação participante. Nesse caso, a participação do investigador não é absoluta, pode variar de acordo com a necessidade e as circunstâncias.

Meirinhos e Osório (2010) aludem ao facto da observação participante não ser de aplicação simples, requerer aprendizagem de modo a permitir ao investigador desempenhar, simultaneamente, o papel de investigador e de participante.

3.3.2. Entrevista

A entrevista é uma das técnicas mais comuns e importantes num estudo de caso (Yin, 2005; Aires, 2015). “A entrevista é um dos mais poderosos meios para chegar ao entendimento dos seres humanos e para a obtenção de informações nos mais diversos campos” (Amado, 2013, p. 207).

Pode ser utilizada conjuntamente com outros métodos de recolha de dados ou constituir o método privilegiado da recolha. Em qualquer das situações, permite ao entrevistador desenvolver de forma intuitiva uma ideia sobre o modo como os sujeitos interpretam aspetos do mundo (Bogdan & Biklen, 1994).

Aires (2015) afirma que a entrevista implica um processo de comunicação, onde consciente ou inconscientemente, o entrevistador e o entrevistado podem influenciar-se mutuamente. “A entrevista compreende, assim, o desenvolvimento de uma interação criadora e captadora de significados em que as características pessoais do entrevistador e do entrevistado influenciam decisivamente o curso da mesma” (p. 29).

Segundo Amado (2013), uma entrevista é um método de excelência de recolha de dados, onde o entrevistado transfere informação pura, para o investigador. É uma conversa intencional com objetivos claros, onde as emoções e influências interpessoais devem ser acauteladas, através de um bom plano de investigação. De acordo com o mesmo autor a entrevista pode classificar-se, quanto à estrutura, de quatro formas distintas: (1) entrevista estruturada ou diretiva - centra-se num tema restrito e determinado. As questões são pré-determinadas. O investigador controla o ritmo da entrevista seguindo um padrão *standard* e direto e não expressa as suas opiniões. Todos os entrevistados respondem às mesmas perguntas, seguindo a mesma ordem. As respostas são fechadas tornando a sua análise rápida e eficiente; (2) entrevista semiestruturada ou semidiretiva - conduzida com base em tópicos específicos, organizados num guião de forma lógica, e a partir dos quais se criam as questões. O entrevistado tem grande liberdade de resposta. As questões não são colocadas de forma rígida, pelo que o entrevistado tem liberdade nas resposta enfatizando o que, na sua opinião, tem maior significado. Devido às suas características, este tipo de entrevista é um dos principais instrumentos de pesquisa de natureza qualitativa; (3) entrevista não estruturada ou não diretiva - tem um formato estímulo/resposta, esperando que a resposta seja subjetivamente sincera. As questões não têm um esquema fixo de categorias de resposta e a sua ordem pode ser alterada – respeita-se a lógica do discurso do entrevistado; (4) entrevista informal - conversação. Bogdan e Biklen (1994) consideram apenas três tipos de classificação da entrevista quanto à sua estrutura: estruturada, não estruturada ou semiestruturada.

Yin (2005) alerta para o cuidado que se deve ter, em relação ao uso de gravações, quando se faz uma entrevista. Enumera vários aspetos a que o investigador deve atender, nomeadamente, a autorização do sujeito e o seu grau de conforto.

O entrevistador não deve pressionar o entrevistado, nem fazer com que este último se sinta incomodado.

> Boas entrevistas revelam paciência. Se não souber porque é que os sujeitos respondem de uma determinada maneira, terá de esperar para encontrar explicação total. Os entrevistadores têm de ser detetives, reunindo partes de conversas, histórias pessoais e experiências, numa tentativa de compreender a perspetiva pessoal do sujeito. (Bogdan & Biklen, 1994, p. 139)

3.3.3. Questionário

O questionário é também um instrumento de recolha de informação. Para Meirinhos e Osório (2010) o questionário "baseia-se na criação de um formulário, previamente elaborado e normalizado" (p. 62). Os autores destacam que esta técnica está mais associada à investigação quantitativa, não estando muito representada na investigação qualitativa. Para Gil (2008), o questionário é definido como "a técnica de investigação formada por questões que são submetidas a pessoas com o propósito de obter informações sobre conhecimentos, crenças, sentimentos, valores, interesses, expectativas, aspirações, temores, comportamento presente ou passado, etc." (p. 121). O mesmo autor alerta para os seguintes cuidados a ter na elaboração de um questionário: constatação da sua eficácia para verificação dos objetivos; determinação da forma e do conteúdo das questões; quantidade e ordenação das questões; construção das alternativas; apresentação do questionário e pré-teste do questionário.

3.3.4. Recolha documental

A análise documental é utilizada em muitas investigações e pode desempenhar várias funções: complementar a informação obtida por outros métodos de recolha, "validar" e contrastar outra informação, reconstituir acontecimentos importantes e relevantes para o estudo (Aires, 2015). Para Yin (2005), a função mais importante dos documentos é "corroborar e valorizar as evidências oriundas de outras fontes" (p. 109).

Da recolha documental fazem parte documentos oficiais (internos e externos) e documentos pessoais. Os documentos oficiais são os que contêm informação sobre as organizações, registos sobre os estudantes e o seu percurso escolar, etc. Os documentos pessoais são produzidos pelos próprios sujeitos do estudo e incluem cartas, diários, memorandos, autobiografias, crenças, entre outros, e têm uma vertente mais íntima. Este tipo de elementos, podem revelar-se de extrema importância para a análise de processos educativos (Aires, 2015; Bogdan & Biklen, 1994). Para além destes documentos Bogdan e Biklen (1994), consideram ainda registos sobre os alunos e ficheiros pessoais que acompanham os estudantes ao longo de todo o seu percurso escolar e que contêm toda a informação relativa ao seu percurso (relatórios, notas, advertências, informações de outras instituições frequentadas anteriormente pelo aluno, etc.).

Como qualquer outra técnica, a recolha documental tem vantagens e desvantagens. Yin (2005) aponta as seguintes vantagens: pode ser consultada sempre que necessário, não é resultado do estudo de caso, é exata e tem ampla cobertura no tempo e no espaço. Como desvantagens o autor indica: pode ter fraca capacidade de recuperação, seletividade e visão tendenciosa, podem existir dificuldades/impossibilidade de acesso.

Kripka, Scheller e Bonotto (2015) destacam, também, o facto das fontes documentais facilitarem a obtenção de dados com qualidade, quantidade e com menor custo, evitando constrangimentos dos sujeitos.

3.4. Procedimentos Metodológicos Adotados

O presente trabalho assenta numa investigação qualitativa, incluindo cinco estudos de caso, em que os participantes envolvidos são alunos de uma turma do 10.º ano de uma escola do distrito de Setúbal. O estudo centra-se na resolução de tarefas compostas por duas componentes distintas. Uma de natureza exploratória, com o auxílio da calculadora gráfica e uma outra de natureza demonstrativa que abarca conteúdos teóricos no domínio de funções. Deste modo, pretende-se avaliar a forma como a utilização das novas tecnologias influenciam a formulação de conjeturas, bem como o processo de demonstração das mesmas.

O objetivo geral deste estudo é analisar a capacidade de demonstração Matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade, num contexto de utilização da calculadora gráfica, que se espera ser alcançado através das respostas às seguintes questões de investigação:

1. Qual o entendimento que os alunos têm de demonstração? Qual a importância que lhe atribuem?
2. De que modo os alunos formulam conjeturas? Que tipo de raciocínio desenvolvem ao utilizar a calculadora gráfica na sua atividade com funções?
3. Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica sobre o processo de demonstração?

3.4.1. Critérios de seleção dos participantes

A seleção dos alunos foi efetuada tendo em atenção o objetivo da investigação, ou seja, analisar a forma como os alunos organizam o seu raciocínio lógico-dedutivo independentemente dos seus resultados, bem como, verificar se a utilização da calculadora tem o mesmo tipo de impacto em alunos com diferentes níveis de aproveitamento. Assim, os alunos foram escolhidos de modo a garantir a heterogeneidade do grupo, incluindo sujeitos de ambos os sexos, métodos de trabalho diversificados, capacidade de compreensão e raciocínio distinta, bem como níveis de aproveitamento diversificados. Para além dos critérios mencionados, a escolha dos participantes recaiu apenas sobre os que se voluntariaram. Após a primeira fase de seleção, onde foi tido em conta o interesse e disponibilidade dos alunos para participar no estudo, foram selecionados cinco alunos para integrar a investigação. Para tal, foram consideradas as classificações obtidas no 1.º período e as avaliações realizadas durante o 2.º período. Foi também tido em consideração, a observação realizada em sala de aula até ao momento da recolha de dados. Esta observação permitiu analisar o interesse e motivação pela disciplina, as intervenções e o empenho demonstrado. Neste processo, também foi tida em atenção a opinião da professora titular da turma. A participação de todos os alunos que integraram o estudo, foi devidamente autorizada pelos respetivos encarregados de educação (ver Anexo 6).

3.4.2. Estratégias de recolha de dados

A recolha dos dados desta investigação foi efetuada através de observação participante e não participante, análise de documental do material produzido pelos alunos durante as sessões de trabalho e da realização de entrevistas semiestruturadas.

1.4.2.3. Observação

A turma que os participantes do estudo integram, foi acompanhada pela investigadora na quase totalidade das aulas. Durante essas aulas, foi efetuada observação não participante, a qual ajudou à caracterização dos alunos e da relação destes com a Matemática, como por exemplo, motivação, interesse, participação, raciocínios aplicados em situações concretas no decorrer das aulas, organização, forma de comunicar bem como, outros aspetos que se tenham mostrados relevantes para a seleção dos alunos (trabalhos de casa, trabalhos de realização facultativa propostos pela professora titular e trabalho autónomo). Também, durante a realização das tarefas, este tipo de observação permitiu percecionar eventuais bloqueios e o modo como foram ou não superados. Permitiu, também, compreender de modo mais aprofundado, o raciocínio dos alunos ao longo da realização das tarefas.

Ao longo das sessões de trabalho, foi privilegiada a observação não participante, no entanto, em alguns momentos, nomeadamente, quando a investigadora se apercebia que os alunos não conseguiam avançar na resolução das tarefas, optou-se por uma observação participante. Este tipo de observação permitiu evidenciar alguns processos de raciocínio utilizados pelos alunos, que de outro modo o aluno poderia não transmitir.

1.4.2.4. Entrevista semiestruturada

Foram realizadas entrevistas semiestruturadas a cada um dos alunos participantes, seguindo o guião que pode ser observado no Anexo 2. Uma entrevista inicial e outra após a realização de cada uma das tarefas. As entrevistas iniciais visaram compreender qual a área da Matemática de que os alunos mais gostam, o entendimento que têm de demonstração e a utilidade da demonstração. Por sua vez, as entrevistas pós-tarefa tentavam aferir qual a relação dos alunos com a calculadora gráfica durante a realização da tarefa, opinião sobre a tarefa e as dificuldades sentidas na realização da mesma. As entrevistas iniciais foram realizadas nos dias 25, 26 e 27 de março, enquanto que as pós-tarefa foram realizadas após cada uma das tarefas.

1.4.2.5. Recolha documental

A análise documental afigurou-se como um método importante, na medida em que todas as resoluções em papel, foram recolhidas para análise e compreensão dos raciocínios lógicos, de cada um. Para um maior e melhor conhecimento dos alunos, foram também recolhidos documentos junto da diretora de turma. A análise destes documentos permitiu compreender o percurso escolar de cada um, bem como conhecer outras características de cariz mais pessoal (idade, zona de residência, habilitações académicas dos pais).

1.4.3. Sessões de trabalho

A recolha de dados decorreu de forma global em três sessões de trabalho, para resolução das tarefas propostas. As sessões de trabalho em que se realizaram as tarefas tiveram, cada uma, a duração aproximada de 100 minutos. A primeira sessão de trabalho decorreu no dia vinte e oito de março, com o início às onze horas e vinte minuto tendo sido realizada a tarefa "Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa", que pode ser consultada no Anexo 3. A segunda sessão de trabalho decorreu no dia dois de abril, às dezasseis horas e vinte minutos e foi realizada a tarefa "Sentido da concavidade de um gráfico de uma função real de variável real", que se encontra no Anexo 4. Por último, os alunos realizaram a tarefa sita no Anexo 5, "Coordenadas do vértice de uma função quadrática", na terceira sessão de trabalho que decorreu no dia quatro de abril, com início às onze horas e vinte minutos. Todas as sessões decorreram numa sala de aula da escola. Para garantir que os alunos trabalhavam individualmente e de forma autónoma na tarefa, bem como para facilitar a recolha de dados, os participantes foram colocados estrategicamente em mesas relativamente distanciadas. No momento em que as tarefas foram distribuídas aos alunos, foi também informado que deviam escrever todos os seus raciocínios e justificações dos mesmos. Durante a resolução das tarefas, a investigadora reduziu a sua intervenção ao mínimo, participando apenas quando os alunos revelavam bloqueio na resolução da tarefa. Muitas das intervenções foram feitas recorrendo a questões que levassem os alunos a tentar pensar de outra forma e ultrapassar a dificuldade.

1.4.4. Tarefas

Para esta investigação foram propostas três tarefas, tendo todas elas como objetivo principal demonstrar um dado resultado. Tal resultado seria (ou não) percecionado pela observação, na calculadora gráfica, do gráfico de várias funções levando à formulação de conjeturas. Todos os alunos envolvidos na investigação realizaram as mesmas tarefas. Todas as propostas foram elaboradas de acordo com o programa de Matemática A do 10.º ano de escolaridade, estando como tal, adaptadas ao que se espera que um aluno, neste nível de ensino, consiga realizar. A sequência com que foram aplicadas esteve relacionada, não só com o seguimento do programa, mas também com o grau de dificuldade que aumenta da primeira para a terceira tarefa. Nas duas primeiras tarefas, a observação dos gráficos permite criar uma conjetura que se pretende que os alunos demonstrem em seguida. A última tarefa induz primeiramente a uma conjetura, que cairá com um outro exemplo, revelando-se difícil criar uma nova conjetura, havendo neste caso necessidade da demonstração analítica do resultado pedido.

Com a primeira tarefa, pretendia-se que os alunos demonstrassem analiticamente, mas a partir da uma análise gráfica, a relação existente entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa, isto é, sempre que uma função real de variável real, *f*, admite inversa, os gráficos cartesianos da função e da sua inversa são a imagem um do outro pela reflexão axial de eixo de reflexão $y = x$.

A segunda tarefa tinha como objetivo demonstrar que o sentido da concavidade do gráfico de uma função quadrática, definida pela expressão $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$, é voltada para cima se $a > 0$ e é voltada para baixo se $a < 0$. Através da representação gráfica de exemplos concretos de funções do tipo ax^2, $a \neq 0$, o conceito do sentido de concavidade do gráfico de uma função quadrática num dado intervalo *I* é ilustrado pela comparação dos declives de duas retas definidas por quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, pertencentes ao intervalo e de abcissas, respetivamente, $x_P, x_Q\ e\ x_R$, com $x_P < x_Q < < x_R$. Como este conteúdo ainda não tinha sido lecionado, foi incluído no enunciado da tarefa.

A terceira e última tarefa tinha como objetivo demonstrar que o vértice do gráfico cartesiano de qualquer função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, tem coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$. Pretendia-se que o aluno definisse a função *f*, por uma expressão equivalente da forma $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$[7], com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$, e demonstrasse que o vértice do gráfico cartesiano de qualquer função quadrática tem coordenadas (h, k).

[7] Antes de os alunos realizarem a última tarefa a investigadora fez uma revisão do método de completar o quadrado.

4 Apresentação e Análise de Resultados

No presente capítulo são apresentados os cinco estudos de caso realizados no âmbito da investigação desenvolvida. Todos os alunos que entraram no estudo pertenciam à turma de 10.º ano acompanhada, durante o ano letivo, pela investigadora. Todos os nomes utilizados na apresentação, Afonso, Clara, Matilde, João e Teresa, são fictícios de modo a preservar a identidade dos alunos. Nos excertos transcritos das entrevistas são utilizadas, para identificação dos alunos, as iniciais do nome fictício de cada um. A investigadora é identificada pela letra I.

4.1. Clara

No início do ano letivo Clara tinha 15 anos. É uma aluna trabalhadora em aula, mas apresenta uma postura um pouco ansiosa perante conteúdos novos, antecipando possíveis cenários que, na maioria das vezes, não fazem qualquer sentido. Distrai-se muitas vezes devido ao facto de ser conversadora em aula, mas recupera facilmente a matéria perdida. Ao longo do ano letivo tem mantido os seus resultados. Em contexto de turma, é uma aluna média, mas poderia melhorar os seus resultados se assumisse uma postura mais atenta em sala de aula. Usualmente, consegue manter um raciocínio lógico. É dedicada e realiza quase sempre os trabalhos de casa. É organizada e faz registo de tudo o que é feito em sala de aula, no seu caderno. Clara tem um percurso escolar sem retenções. Terminou o 9.º ano de escolaridade com nível 4 a Matemática, classificação que manteve no Exame Nacional. No presente ano letivo obteve 14 valores à disciplina de Matemática A no final dos dois primeiros períodos.

Relativamente aos conteúdos da Matemática diz preferir equações porque lhe permitem resolver muitos problemas e desafios. A geometria é o conteúdo que menos gosta, porque, segundo diz, tem "muita dificuldade em visualizar as coisas".

4.1.1. Demonstração – noção e importância

Clara mostrou alguma dificuldade em responder às questões que lhe foram sendo colocadas pela investigadora sobre o seu entendimento de demonstração. Tentou sempre dar respostas curtas, segundo ela porque tinha medo de ao falar muito, começar a divagar de forma errada. Tem uma ideia do que é uma demonstração, embora se mostre confusa. Inicialmente, parece confundir exemplo e demonstração. No entanto, quando confrontada novamente com a questão sobre a sua ideia de demonstração, a aluna consegue explicar por palavras suas o que é uma demonstração. Para Clara, demonstração é um raciocínio lógico que usa definições para chegar ao resultado pretendido. A função que a aluna lhe atribui é de validação de resultados, referindo-a por duas vezes.

I: O que é, para ti, uma demonstração Matemática?
C: Um exemplo?
I: Não sei. O que achas que é uma demonstração? Achas que é um exemplo?
C: Não, acho que é muito mais que isso.
I: Então, o que achas que é uma demonstração?
C: Uma demonstração serve para mostrar que algo é sempre verdade. E qualquer exemplo que dermos, vai sempre verificar-se isso. Segue uns passos lógicos e usa umas definições para chegar onde se quer.
I: Para que achas que serve a demonstração?
C: Serve para as outras pessoas, as que fazem a demonstração, perceberem que os resultados são sempre verdadeiros.

A aluna parece assumir que a demonstração não tem utilidade para si, mas apenas para quem faz as demonstrações, deixando antever que nunca fez nenhuma. No entanto, quando questionada, de forma mais direta, sobre a utilidade das demonstrações na aquisição e compreensão dos conteúdos, transparece de imediato que as mesmas influenciam de modo benéfico, a aquisição e a compreensão dos conteúdos. Nesta resposta, parece admitir que ela também as faz, ainda que provavelmente, não as realize sozinha. Mais adiante, ainda faz transparecer que a demonstração serve também como forma de explicar e entender Matemática. Permite um olhar mais simples sobre a matéria lecionada, possibilitando uma melhor aplicação dos resultados lecionados.

I: Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?
C: Sim, se colocarem só uma fórmula no quadro e não nos mostrarem como é que a construímos, também, se calhar, não vamos saber como a utilizar bem. Também, é útil depois quando estudamos, para perceber melhor a matéria.

Clara não se recorda de fazer demonstrações antes do 10.º ano. Desde que as realiza na aula, sente-se confusa e baralhada, quando as vê pela primeira vez. Parece não conseguir entender as demonstrações de imediato, necessitando de algum tempo até que as compreenda.

I: Costumas fazer demonstrações na aula de Matemática?
C: Fazemos algumas. Sempre que a professora de Matemática introduz um tema ou um conceito ela faz demonstrações.
I: A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
C: Acho foi só agora no 10.º ano. Este ano a professora começou a fazer demonstrações de como e porque é que as coisas aparecem. Lembro-me, por exemplo de chegarmos à fórmula da mediatriz e da circunferência a partir da distância.
I: Como te sentias na altura em que viste demonstrações pela primeira vez?
A: A primeira vez e agora stora. Primeiro fico sempre baralhada. Acho sempre um bocado confuso. Mas depois de conseguir relacionar e perceber, as coisas fazem sentido e fico feliz quando compreendo.

A aluna parece não saber concretamente se deveriam ser realizadas mais ou menos demonstrações nas aulas, mas admite que por vezes os alunos não tomam a devida atenção quando são realizadas no quadro. Na sua opinião, as demonstrações deveriam ser realizadas por outra pessoa, que não a professora, para manter o foco da turma. Pelo facto de estar inserida numa turma acompanhada por dois professores estagiários, sugere que poderiam ser eles a realizá-las.

I: Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas?
C: Acho que são em número suficiente. Às vezes podíamos ter um pouco mais, mas não sei, não tenho a certeza.
I: E quem achas que as deveria fazer? Porquê?
C: Acho que podiam ser os estagiários, por exemplo. Se houvesse mudança de pessoa na altura da demonstração chamava mais a atenção, nós ficávamos mais atentos, mas não sei.
I: E vocês alunos, achas que não conseguiriam fazer demonstrações sozinhos?
C: Se calhar, não sei. Se estudássemos antes. Acho que hoje, por exemplo, já conseguia chegar sozinha à fórmula da circunferência, mas coisas novas não sei... Talvez… nunca pensei nisso. Também, se treinarmos… ou, quanto mais tivermos interiorizado, sentimo-nos mais à vontade para fazer este tipo de coisas.

Clara indica que nunca pensara na possibilidade de tentar fazer uma demonstração sozinha. Admite que, provavelmente, poderia tentar se já tivesse estudado antes. Embora não o diga diretamente, parece sugerir que conseguiria reproduzir demonstrações que já tivesse feito anteriormente, mostrando alguma insegurança quanto à realização de novas demonstrações. Considera, contudo, que são hábitos que necessitam de ser praticados para que os alunos o consigam fazer de forma mais natural.

4.1.2. Tarefa 1

A primeira tarefa tinha como objetivo encontrar a relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa a partir da utilização da calculadora gráfica. Formular uma conjetura e fazer a sua demonstração.

A investigadora distribuiu a tarefa dando várias informações a ter em consideração, por exemplo o tipo de *zoom* que deviam utilizar e que deveriam fazer todos os registos, que considerassem necessários e/ou pertinentes.

Clara estava muito ansiosa e curiosa no início da tarefa. Sentia-se insegura quanto à sua realização. Perguntou várias vezes, se não ia mesmo servir para avaliação. A aluna sentiu muitas dificuldades na realização desta tarefa. Embora, antes de os alunos realizarem a tarefa, tenham tido uns breves momentos de explicação do funcionamento das calculadoras gráficas, o facto de alguns nunca terem trabalhado com elas influenciou a realização da mesma. Foi o caso de Clara, que mostrou sempre algumas dificuldades no manuseamento da calculadora, tendo solicitado numerosas vezes, a ajuda da investigadora para poder avançar na sua resolução. Por indicação da investigadora, fez rapidamente um formulário com os menus da calculadora para facilitar a progressão na realização da tarefa. A partir desse momento adotou uma postura mais tranquila tornando-se mais autónoma. Mostrou grandes dificuldades em encontrar a relação geométrica existente entre o gráfico da função real de variável real definida por $f(x) = 2 + x^3$ e o da sua inversa, por não ter seguido as indicações dadas inicialmente, relativamente ao *zoom* que deveria utilizar. Chamada a atenção, alterou o *zoom*, obtendo a visualização adequada. Após observação prolongada, voltou a chamar dizendo que os gráficos das duas funções eram simétricos. A investigadora perguntou-lhe se conseguia identificar o eixo de simetria. Rapidamente afirmou ser a reta $y = x$. Estando no caminho correto, foi incentivada a escrever as relações que tinha encontrado.

De forma célere, usou folhas distintas, na calculadora, para a representação gráfica das funções sugeridas: uma folha para representar graficamente g e g^{-1} e outra para representar h e h^{-1}. Observou várias vezes os gráficos cartesianos obtidos, alternando a visualização das várias folhas. Voltou a chamar e perguntou o que era uma conjetura. A investigadora explicou rapidamente que conjetura é uma afirmação que se supõe certa, mas carece de demonstração. Perguntou-lhe se tinha entendido e Clara respondeu:

> C: Sim, é uma afirmação que pode ou não ser verdade, não é? Neste caso, a conjetura tem a ver com os gráficos das funções e das suas inversas e do eixo de simetria, não é?

A investigadora incitou Clara a escrever a sua conjetura avançando com o seu raciocínio. Observando a conjetura que a aluna escrevera, a investigadora verificou que não tinha conseguido fazê-la de forma inteligível, como se pode observar na Figura 4.1. Voltou a perguntar-lhe se tinha percebido o que era uma conjetura e Clara respondeu que achava que sim, que era uma afirmação que podia ser ou não verdadeira e precisava de ser demonstrada. Na sua resposta, acrescentou ainda que na situação concreta a observação dos gráficos mostrava que a sua conjetura era sempre verdadeira. Assim, só tinha de mostrar que a reta $y = x$ era o eixo simetria. Nesta resposta, Clara revela não conseguir distinguir um exemplo de uma demonstração, admitindo a sua validade com base nos exemplos. Não se revela coerente com o que tinha afirmado durante a sua entrevista.

Não querendo influenciar mais o raciocínio de Clara, a investigadora pede-lhe para avançar.

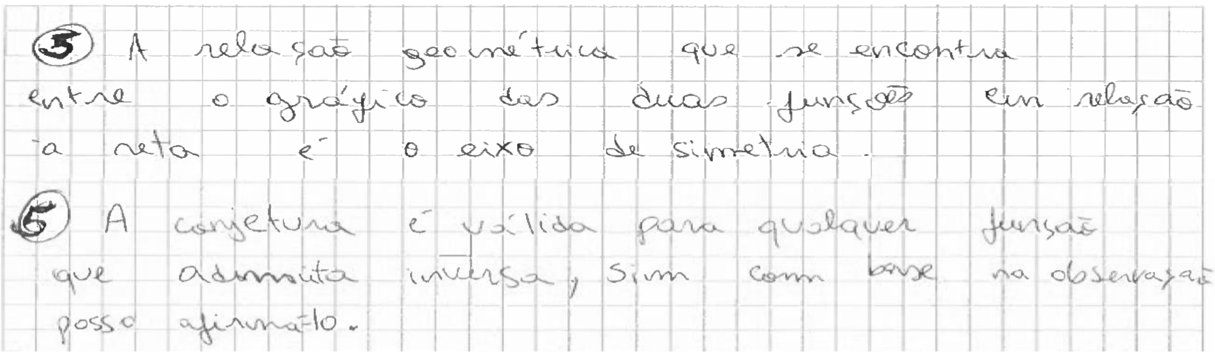

5) A relação geométrica que se encontra entre o gráfico das duas funções em relação a reta é o eixo de simetria.
5) A conjetura é válida para qualquer função que admita inversa, sim com base na observação posso afirmá-lo.

Figura 4.1 – Registo da conjetura elaborada por Clara na tarefa 1

Durante o processo de demonstração Clara continuou focada nos exemplos. Pela observação efetuada, Clara marcou um ponto A, na reta $y = x$ e para os vários exemplos, usou os pontos de interseção com os eixos coordenados (de cada função e da respetiva inversa) e verificou que se encontravam à mesma distância. Isto é, por exemplo, verificou que o ponto de coordenadas $B(0, 2)$ (que pertence ao gráfico da função f) e o ponto de coordenadas $C(2, 0)$ (que pertence ao gráfico da função f^{-1}) estão à mesma distância da reta $y = x$. Neste caso, traçou os segmentos de reta $[AB]$ e [AC] e determinou a medida do seu comprimento. Deslocou o ponto A sobre a reta $y = x$ e verificou, para várias situações que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Assumiu, a partir dessa exploração que qualquer que fosse o ponto $A \in G_f$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Repetiu o mesmo procedimento para os pontos de coordenadas $D(-\sqrt[3]{2}, 0) \in G_f$ e $E(0, -\sqrt[3]{2}) \in G_{f^{-1}}$ verificando novamente, para um dado número de pontos que $\overline{AD} = \overline{AE}$. Agiu de modo análogo, com as funções g e g^{-1} e h e h^{-1}. Observando que $\overline{AB} = \overline{AC}$, admitiu que o mesmo se verificava quando se considera quaisquer pares de pontos $B(a, b) \in G_f$ e $C(b, a) \in G_{f^{-1}}$, que designa como simétricos. Mais uma vez a aluna generaliza o resultado para todos os casos e admite que pode considerar verdadeira a sua conjetura.

A resposta apresentada por Clara encontra-se abaixo, na Figura 4.2.

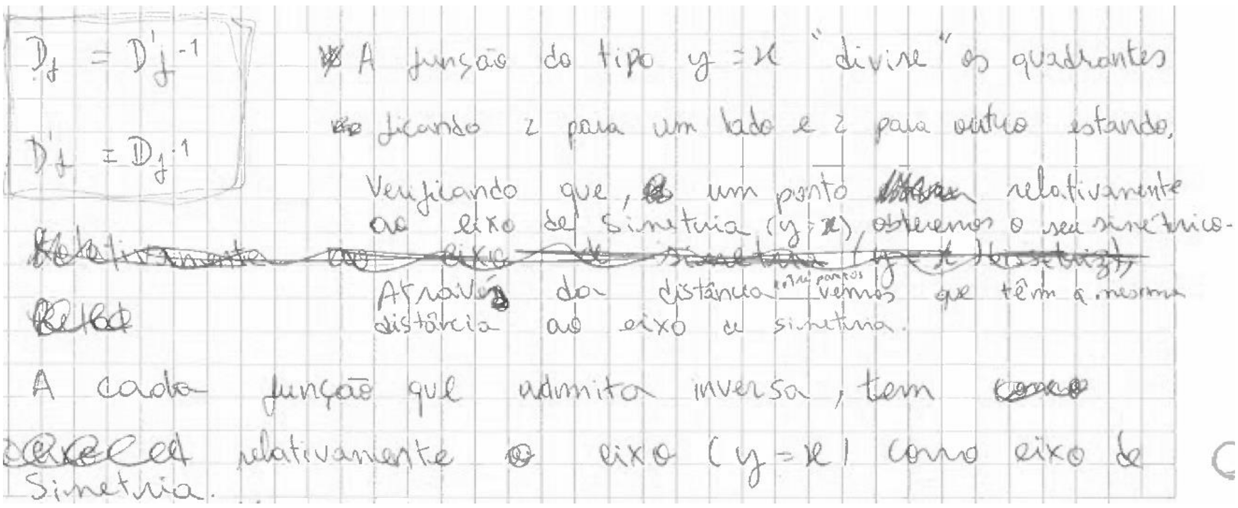


Figura 4.2 – Registo da dedução feita por Clara na tarefa 1

Clara não conseguiu formular a sua conjetura de forma inteligível, no entanto, oralmente tinha conseguido expressá-la corretamente. Porém, não conseguiu realizar a demonstração. Não desenvolveu o raciocínio abstrato necessário à sua realização, remetendo-se apenas à generalização dos resultados que obteve aquando da sua exploração através da calculadora. Contudo, também a explicação por extenso não deixa transparecer o que realmente pretende afirmar.

Terminada a tarefa, a aluna entregou-a. Em seguida, a investigadora entrevistou-a e quando questionada sobre o que tinha achado da tarefa, respondeu:

C: Achei muito difícil. Nem sabia o que escrever, estava muito nervosa.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
C: Nada foi fácil. Demorei muito tempo para entender. Era tudo novo. A calculadora, a forma como tinha de pensar. Foi horrível! Nem sabia bem o que era uma conjetura. A demonstração então não sabia como pegar, nem como escrever.

Clara, apresentava-se efetivamente, muito nervosa o que poderá ter contribuído para o seu desempenho nesta tarefa. Mostrando-lhe a tarefa a investigadora tenta averiguar o que levou Clara a ser pouco objetiva, mesmo escrevendo em linguagem corrente.

I: Quando falaste comigo durante a tarefa, expuseste a conjetura de forma mais objetiva do que quando escreveste. Porquê?
C: Nem sei professora, sentia-me tão perdida que nem sabia o que escrevia. Achei que estava a escrever bem, mas agora olhando melhor, nem eu percebo o que aqui está.

Durante a entrevista, Clara revela quase de imediato, que o que fez não era uma demonstração. Nesta atitude, mostra-se de novo mais coerente. Dá uma ideia de a noção de demonstração não estar muito enraizada e em situação de *stress*, recorre apenas a exemplos. Também, poderá ter acontecido que o facto de ter visualizado os exemplos tenha feito com que se centrasse neles, perdendo o foco do que realmente era pretendido.

I: E achas que podes afirmar a tua conjetura com base nos exemplos?
C: Ai, professora, estou mesmo confusa. Fiz tudo errado. Não, tinha de demonstrar para um qualquer genérico, não era?
I: Mesmo sendo a primeira vez que utilizas a calculadora, achas que a sua utilização te ajudou na criação da conjetura?
C: Se não fosse a calculadora nem tinha conseguido encontrar nenhuma relação geométrica entre os gráficos. Também, foi por poder observar os exemplos na calculadora que pensei que podia usar a distância na demonstração.

A aluna revela que a calculadora se mostrou muito importante para a criação da conjetura. Admite ainda que, embora não tenha efetuado a demonstração e apenas se tenha limitado a generalizar o resultado que foi observado através da sua análise exploratória, foi a calculadora que a ajudou a pensar que deveria usar a distância para a fazer. Esta afirmação poderá indicar que a calculadora se revela uma ferramenta importante na criação da conjetura.

4.1.3. Tarefa 2

Na tarefa 2 é pretendido que os alunos conjeturem acerca da concavidade de uma função quadrática e demonstrem a sua conjetura para as funções quadráticas do tipo $ax^2, a \neq 0$.

No dia da realização da segunda tarefa, Clara mostra-se um pouco mais calma. Inicia a tarefa segundo as indicações dadas. A investigadora repara que Clara começa a calcular declives sem recurso à calculadora. Sugere-lhe que use as potencialidades da calculadora gráfica. A aluna não hesita e a resolução começa a ser mais célere, decorrendo sem problemas. Clara consegue escrever, de forma imediata, a sua conjetura, que se pode observar na Figura 4.3.

Para qualquer função do tipo $ax^2, a \neq 0$, quando o seu coeficiente for positivo a sua concavidade é virada para cima.

Para qualquer função do tipo $ax^2, a \neq 0$, quando o seu coeficiente for negativo a sua concavidade é virada para baixo

Figura 4.3 – Conjetura elaborada por Clara na tarefa 2

Após esta fase, socorre-se da calculadora, vai fazendo experiências, mas não avança na demonstração. A investigadora sugere-lhe que releia as indicações que são fornecidas no início. Clara consegue delinear a sua demonstração sem se socorrer mais da calculadora. A observação efetuada mostra que Clara se apoiou nos cálculos iniciais que efetuou para determinar os declives das retas, nos seus exemplos, antes de começar a utilizar a calculadora. Nesta tarefa, Clara percebe claramente o que lhe é pedido e realiza-a de forma autónoma e organizada, tal com sugere a Figura 4.4.

Três pontos, P, Q, R, pertencem à função f do tipo ax^2, $a \neq 0$.

$f(x) = ax^2$

$y = f(x) = ax^2$

$P(x_1, ax_1^2)$

$Q(x_2, ax_2^2)$

$R(x_3, ax_3^2)$

$$m_{PQ} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{a\cancel{(x_2 - x_1)}(x_2 + x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}}$$

$$\Leftrightarrow m_{PQ} = a(x_2 + x_1)$$

$$m_{QR} = \frac{ax_3^2 - ax_2^2}{x_3 - x_2} \Leftrightarrow m_{QR} = \frac{a(x_3^2 - x_2^2)}{x_3 - x_2}$$

$$\Leftrightarrow m_{QR} = \frac{a\cancel{(x_3 - x_2)}(x_3 + x_2)}{\cancel{x_3 - x_2}}$$

$$\Leftrightarrow m_{QR} = a(x_3 + x_2)$$

. $x_1 < x_2 < x_3$

. $a(x_3 + x_2)$ é maior que $a(x_2 + x_1)$, quando a é maior que 0.

. $a(x_2 + x_1)$ é menor que $a(x_3 + x_2)$, quando a é menor que 0.

. Logo quando a toma valores positivos a sua concavidade é virada para cima, no entanto, quando a toma valores negativos a sua concavidade é virada para baixo.

Figura 4.4 – Demonstração realizada por Clara na tarefa 2

Finaliza a tarefa e entrega-a, seguindo-se uma pequena entrevista, com o intuito de saber a opinião de Clara sobre a tarefa realizada. A observação das suas respostas, sugere que Clara se sente mais confortável quanto executa tarefas mais repetitivas. Poderá sentir-se mais confiante, por ter a possibilidade de praticar mais e assim, ter maior domínio sobre as ações que realiza.

I: O que achaste da tarefa?
C: Eu gostei mais desta tarefa. Achei mais interessante.
I: O que é que para ti foi mais fácil? E o que é que foi mais difícil?
C: Esta tarefa foi mais simples que a primeira. No início achei estranha e um bocado complicada, mas depois como é muito repetitiva, tornou-se mais fácil perceber e chegar lá. O mais difícil foi mesmo a demonstração.
I: Também estavas mais calma.
C: Muito mais stora. A outra era a primeira, não fazia ideia do que pretendia. Hoje já vinha mais convicta. Prometi a mim mesma que não ia fazer asneiras como na outra.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
C: A calculadora ajudou mais no princípio da tarefa. Na conjetura não foi preciso. Já demos o ano passado. Na demonstração não precisei muito da calculadora. Acho que foi mais intuitivo.

Na criação da conjetura a aluna usa o conhecimento que já tem sobre o sentido da concavidade do gráfico cartesiano de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, não sentido necessidade de utilizar a calculadora para o tentar descobrir. Esta atitude poderá ser explicada pela confiança que tem no seu conhecimento.

4.1.4. Tarefa 3

A terceira tarefa tem uma estrutura um pouco diferente das outras. Considera a família de funções quadráticas $ax^2 + bx + c, a \neq 0$ e tem como objetivo determinar as coordenadas do vértice. Numa primeira fase induz a uma conjetura, para a ordenada do vértice, que não é verdadeira.

No início da terceira tarefa, Clara foi célere na resolução da primeira questão, mostrando um maior domínio na utilização da calculadora gráfica. A aluna fez a sua conjetura relativa à relação existente entre os coeficientes a, b e c e as coordenadas do vértice da parábola. A conjetura feita pela aluna, para a abcissa do vértice, que se pode ler na Figura 4.5, não era a prevista. Clara faz uma conjetura, que funciona para os exemplos que observa e analisa na calculadora, mas muito mais complexa do que a esperada. Embora, usando linguagem natural, a aluna faz a seguinte conjetura: a abcissa do vértice da parábola é dada por $\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}$. Esta conjetura, em vez de $-\frac{b}{2a}$, deixa transparecer que a aluna não reflete muito sobre o que escreve. Ao fazê-la, Clara não põe a hipótese de o vértice poder ter abcissa negativa. É, contudo, de notar, que tem o cuidado de garantir que o radicando de uma raiz quadrada não pode ser negativo, garantindo-o com a utilização do módulo.

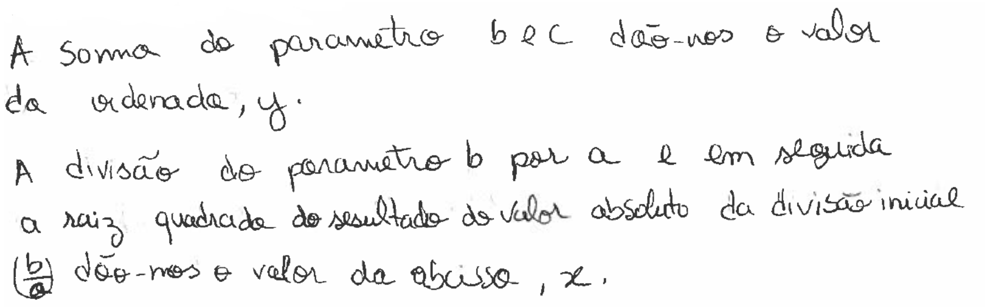

A soma do parametro b e c dão-nos o valor
da ordenada, y.
A divisão do parametro b por a e em seguida
a raiz quadrada do resultado do valor absoluto da divisão inicial
$\left(\frac{b}{a}\right)$ dão-nos o valor da abcissa, x.

Figura 4.5 – Conjetura elaborada por Clara na tarefa 3

Na segunda questão, ao verificar que a sua conjetura falha para as duas coordenadas do vértice, Clara mostra-se preocupada. Volta a verificar se não cometeu nenhum erro na introdução da expressão analítica e verifica, também, o que fez na primeira pergunta recorrendo constantemente aos gráficos que tinha na calculadora. Acaba por expressar em voz alta que cometeu um erro e não o consegue encontrar. A investigadora, pergunta-lhe porque razão acha que cometeu um erro e Clara responde:

C: A minha conjetura não funciona.
I: E tem de funcionar? Todas as conjeturas têm de ser demonstradas, não é?

A forma como trabalha e explora os vários exemplos que lhe são colocados parece mostrar que se apoia no trabalho realizado na calculadora para a criação da conjetura. Já a afirmação feita pela aluna, indica que mantém dúvidas sobre o que é uma conjetura. Aparenta admitir que ao fazer uma conjetura baseada na observação de alguns exemplos ela será sempre verdadeira. Sugere também que não sente necessidade de demonstrar as conjeturas.

A conversa com a investigadora permitiu desconstruir a ideia de conjetura que tinha. De tomar consciência que o facto de fazer uma conjetura, sobre algo que parece ser verdade, não garante a validade. Que uma conjetura carece sempre de demonstração. Assim, Clara avança na resolução decidindo seguir as sugestões feitas no enunciado, isto é, começar por escrever a função real de variável real $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x-h)^2 + k$ com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$ e, em seguida, utilizar transformações do gráfico para demonstrar que o vértice da parábola tem coordenadas $V(h, k)$. A aluna mostra alguma dificuldade em escrever a função $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x-h)^2 + k, a \neq 0$. Conseguindo fazê-lo após várias tentativas. A investigadora repara que Clara lê de novo a segunda sugestão e que começa a representar graficamente várias funções na calculadora. Esta atitude parece sugerir que a aluna procura, através de exemplos, perceber como deve estruturar a sua demonstração. Opta por fazer o esboço de alguns dos exemplos que observou na calculadora e utiliza linguagem corrente para complementar os seus esboços. Começa por representar graficamente a função x^2, seguindo-se o da função $-x^2$. Observando que o coeficiente a não tem influência nas coordenadas do vértice opta por considerar $a = 1$ em todos os seus exemplos. Desta forma, faz o esboço da representação gráfica das funções $(x-2)^2$, $(x-4)^2$, $(x-6)^2$, $(x-1)^2$ e $(x+1)^2$, tentando escrever, usando linguagem natural, a translação do gráfico cartesiano da função x^2. Pela escrita depreende-se que, embora ocorra confusão como o sinal de *h*, a aluna conclui corretamente que o gráfico cartesiano da função x^2 sofre uma translação horizontal associada ao vetor (*h*, 0). Embora a aluna não tenha efetuado mais nenhum esboço de representações gráficas de funções, foi possível observar, durante a realização da tarefa, que explorou o que acontecia à representação gráficas das funções $(x-1)^2$ e $(x+1)^2$ quando adicionava uma constante *k*. Neste caso, limita-se a escrever a sua conclusão, isto é, considerando uma função real de variável real *f*, definida por $(x-h)^2$, ao adicionar-lhe uma constante real *k* o gráfico cartesiano da função *f* sofre uma translação vertical associada ao vetor (0, *k*). Contudo, a aluna não escreve as coordenadas do vértice, *V*, para uma qualquer função quadrática escrita na forma $a(x-h)^2+k, a \neq 0$ $(V(h,k))$, deixando em suspenso o que pretende concluir. A demonstração realizada por Clara pode ser observada na Figura 4.6.

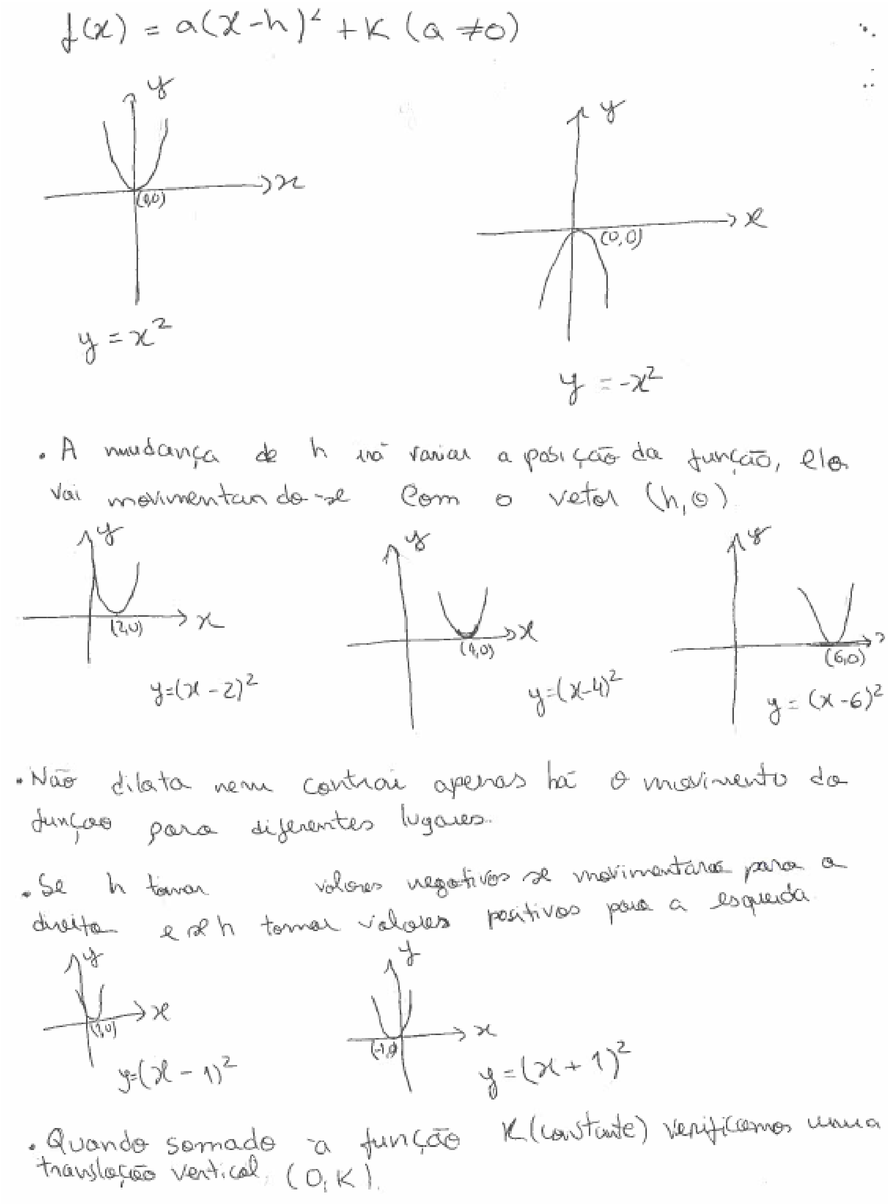


Figura 4.6 – Dedução realizada por Clara na tarefa 3

No entanto, a aluna segue uma linha de raciocínio correto, apoiando-se claramente em exemplos particulares, mas conseguindo generalizar de forma intuitiva e bem justificada para valores quaisquer valores reais *h* e *k*, cometendo apenas um erro de linguagem no que se refere ao sinal de *h*.

Após a entrega da tarefa Clara mostrava-se confiante da sua prestação, indicando que tinha gostado muito da tarefa. Das suas respostas parece transparecer, novamente, que associa conjetura a uma afirmação verdadeira.

I: O que achaste da tarefa?
C: Esta tarefa foi a mais fixe. Foi a que eu mais gostei. É a mais gira. É bué entusiasmante.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
C: A parte em tive mais dificuldade foi na de completar o quadrado e a demonstração, claro. O resto foi fácil. Fiquei bué aflita quando vi que a conjetura falhava, mas depois de falar com stora passou.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
C: Sim, sim, principalmente na demonstração. Fiz vários testezinhos com a calculadora antes de avançar. Ajudou mesmo a pensar como devia seguir o raciocínio.

Por sua vez as afirmações feitas pela aluna relativamente à utilização da calculadora sugerem que esta influenciou o raciocínio que desenvolveu para efetuar a sua demonstração e o modo como a conduziu.

4.1.5. Comentário Final

Clara crê que a demonstração é útil na aquisição e compreensão dos conteúdos. Está associada à explicação dos conteúdos em sala de aula, no entanto, afirma que não é fácil manter-se atenta nas alturas em que são realizadas, o que dificulta a compreensão *à posteriori*.

No que diz respeito à resolução das tarefas, a aluna resolveu com relativa facilidade as duas últimas, ao contrário do ocorrido com a primeira. Na primeira não conseguiu ser autónoma nem coerente no que escrevia. Já nas restantes revelou-se autónoma e mais organizada. O percurso de Clara faz pensar que a falta de contacto com tarefas deste tipo possa ter sido a causa do desnorte da aluna na primeira tarefa. Isso é claramente evidenciado, na resposta que dá quando questionada sobre o motivo pela qual tinha gostado mais da última tarefa.

C: Não sei explicar, mas senti-me bué feliz enquanto a fazia. Também era por estar mais adaptada a este tipo de tarefa. Mas acho que não foi só isso. Esta era diferente. Parecia que íamos para um lado e depois víamos que afinal isso não dava. Mas ao mesmo tempo orientava o caminho a seguir.

A análise da entrevista sugere que Clara sabe o que é uma demonstração, no entanto, a primeira tarefa sugere que, para ela, uma demonstração é uma generalização de uma afirmação que se revela verdadeira para alguns casos particulares. À exceção da tarefa 2, em todas se nota que os exemplos, são muito importantes para Clara, tomando como corretas características do que observa para um pequeno conjunto de exemplos observados.

Na primeira e última tarefa a calculadora parece ter potenciado a criação da conjetura. A observação do modo como desenvolveu a última tarefa, bem como as suas respostas, sugerem que esta tecnologia influenciou o processo de construção da demonstração, quer em termos de raciocínio desenvolvido, quer na organização da escrita. Na segunda tarefa, a calculadora parece não ter interferido nem na criação da conjetura, nem no processo de construção da demonstração. A conversa com a aluna sugere, que tal se deveu ao facto, de não precisar de pesquisar para descobrir a conjetura. A demonstração também assentava num conteúdo bem presente pelo que surgiu intuitivamente, sem sentir a necessidade de usar qualquer auxílio.

4.2. Afonso

Afonso tinha 15 anos, quando ingressou no 10.º ano. É um aluno que revela bom raciocínio e apresenta questões muito pertinentes em aula. Tem sentido crítico, compreende os conteúdos facilmente, é intuitivo e consegue generalizar resultados. Contudo, é um aluno que se distrai com facilidade, mas rapidamente recupera os conteúdos perdidos. Nem sempre passa os conteúdos da aula para o caderno. No início do ano revelou algumas dificuldades de adaptação ao trabalho exigido no ensino secundário, facto que se veio a revelar nas notas que obteve. No decorrer do 2.º período melhorou significativamente, quer na quantidade, quer na qualidade de trabalho desenvolvido. Tomou, também, consciência da importância de fazer os trabalhos de casa regularmente. Terminou o 1.º período com a classificação de 14 valores à disciplina de Matemática A, subindo a classificação para 16 valores no final do 2.º período. Terminou o 3.º ciclo do Ensino Básico com nível 4 na disciplina de Matemática, nota que manteve no exame de final de ciclo.

Afonso afirma gostar muito de Matemática porque tem muitas aplicações. O conteúdo que menos gosta é estatística, porque associa à matéria de Geografia, que detesta. Por outro lado, gosta de equações, geometria analítica e funções.

4.2.1. Demonstração – noção e importância

Durante a primeira entrevista, Afonso teve a oportunidade de se expressar quanto ao seu entendimento e importância que atribui à demonstração, bem como à sua utilidade. Nunca conseguiu alcançar uma postura muito confortável durante a entrevista. Mostrou-se tímido e receoso de as suas respostas não serem corretas.

Afonso mostrou que tem uma ideia correta do que é uma demonstração, embora não o consiga transmitir da forma mais adequada. Pelas palavras que utiliza, subentende-se que para ele demonstração é um raciocínio lógico, que estabelece a veracidade de uma afirmação. Embora, na resposta inicial não refira que o resultado que quer mostrar é verdadeiro, acaba por fazê-lo mais adiante. Assim, pode assumir-se que segundo Afonso, demonstração é um encadeamento pelo qual um resultado é alcançado, por meio de raciocínios lógico-dedutivos, a partir de uma hipótese.

I: O que é, para ti, uma demonstração Matemática?
A: Uma demonstração serve para demonstrar um resultado. A partir de um ponto desenvolve-se uma linha de raciocínio lógico até chegar ao resultado que se quer mostrar.

No entanto, quando tem de pensar para que serve a demonstração, Afonso mostra insegurança relativamente ao afirmado na questão anterior. Parece que, momentaneamente, Afonso pensa que o que disse não esteja correto ou não faça sentido. Inicialmente, aparenta não saber dizer para que serve. Acaba, nesta questão, por atribuir à demonstração a função de convencimento da veracidade de um dado resultado.

I: Para que achas que serve a demonstração?
A: Sei lá stora. Como assim, para que é que serve? Eu se calhar nem sei o que é uma demonstração. Serve para demonstrar, serve para convencer os outros e a mim também que um resultado é verdadeiro.

Analisando a entrevista de Afonso há um sinal de que atribui grande importância e utilidade da demonstração através da função de explicação. Esta surge como a essência para a compreensão e consequente aquisição dos conteúdos da disciplina de Matemática.

I: Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?
A: Sim, quando me dão um resultado, se eu não souber como chego a ele é mais difícil percebê-lo mas, se me mostrarem como é que eu chego ao resultado torna-se mais fácil entender e depois de entender é só usar como se fosse um molde.

Atualmente, as demonstrações são frequentes em sala de aula. A primeira demonstração de que tem memória é a do teorema de Pitágoras (8.º ano). A referência à interação, no momento em que a professora fazia a demonstração no quadro, poderá indicar que, já naquela altura, Afonso sentia interesse por tentar compreender os resultados, que até então lhe eram dados como verdadeiros. Também, poderá sugerir a função de comunicação do conhecimento, com vista à compreensão do mesmo por parte dos alunos.

I: Costumas fazer demonstrações na aula de Matemática?
A: Sim, este ano fazemos muitas demonstrações na aula.
I: A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
A: A primeira demonstração que me lembro foi a do teorema de Pitágoras.
I: Como e por quem eram feitas?
A: Foi a professora que fez no quadro, mas nós interagíamos.

Assume que o sentimento inicial perante uma demonstração, foi de confusão. Mas, mais uma vez, a demonstração surge associada é explicação e compreensão de conteúdos, configurando-se mesmo como verdadeiramente importante para a aquisição dos conteúdos lecionados.

I: Como te sentias na altura?

A: Fiquei confuso, não estava à espera, e era complicado, mas depois foi entrando.
I: E achaste que foi importante perceber o teorema?
A: Sim, porque percebi que aquilo tinha uma razão de ser assim. E ajudou-me a perceber aquela parte da matéria.

Para Afonso a demonstração está associada também ao desafio intelectual e à confiança. Ao entender uma demonstração ou mesmo ao tentar produzir individualmente uma demonstração realizada em aula, embora apenas mentalmente, fá-lo sentir-se mais seguro.

I: E atualmente, como te sentes?
A: Depende, às vezes já consigo imaginar como se vai começar uma demonstração, mas depois a meio penso, aí eu nunca iria fazer isto. Outras vezes, não entendo o início, mas depois mais à frente percebo. E isso é bom, faz-me sentir mais confiante.
I: Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas?
A: Se fizéssemos mais ganhávamos mais confiança para depois encontrar outros métodos de obter o resultado. Quando ficamos bloqueados podermos encontrar mais facilmente outro caminho, encontrar outras alternativas.
I: E quem achas que as deveria fazer? Porquê?
A: Acho que quando a demonstração é muito complexa deve ser o professor a orientar maioritariamente e depois os alunos vão intervindo para não se perderem do raciocínio do professor. Nas mais simples podia ser interessante, mas ia demorar mais tempo e muitos nem iam tentar fazer.

Associado à importância que Afonso concede à demonstração é natural que considere que é importante fazer mais demonstrações em aula. O aluno parece associar também à demonstração a função de descoberta, a realização de mais demonstrações torna-o mais capaz de desenvolver Matemática. Contudo, o fator tempo face à dimensão do programa, bem como a dificuldade que muitos colegas evidenciam na disciplina, faz com que defenda a realização das demonstrações devam ser efetuadas pelos professores.

4.2.2. Tarefa 1

Afonso realizou a primeira tarefa, cujo objetivo era demonstrar que se duas funções reais de variável real são inversas uma da outra, então os respetivos gráficos são simétricos um do outro, relativamente, à bissetriz dos quadrantes ímpares, de uma forma muito autónoma e quase sem apresentar hesitações na sua resolução. Começou, tal como a tarefa propunha por observar o gráfico da função $f(x) = 2 + x^3$ e respondeu rapidamente às questões pedidas. Uma das alíneas da primeira questão solicitava os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Como a abcissa do ponto de interseção com o eixo Ox não era uma dízima finita, teve o cuidado de a calcular analiticamente, apresentando o valor exato (Figura 4.7).

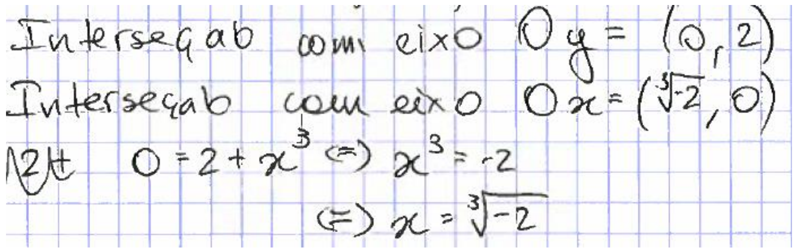

Interseção com eixo Oy = (0, 2)
Interseção com eixo Ox = ($\sqrt[3]{-2}$, 0)
$0 = 2 + x^3 \Leftrightarrow x^3 = -2$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-2}$

Figura 4.7 – Determinação analítica do zero da função *f*, feita por Afonso

A tarefa foi resolvida, pelo aluno, sem problemas e de forma célere. Para a formulação da conjetura observou várias vezes os gráficos que obteve na calculadora, para cada um dos exemplos sugeridos na tarefa, antes de a formular. Na altura, perguntou se podia pensar em outras funções e ver se continuava a observar a mesma relação entre os gráficos da função e o da sua inversa. Foi-lhe dito que tinha liberdade para o fazer, mas que tinha de garantir que as funções escolhidas fossem bijetivas. Nessa altura, acabou por abandonar a ideia focando-se apenas nas que já tinha representado graficamente. Voltou a chamar, afirmando que via sempre a mesma relação, que os gráficos das funções e das respetivas inversas eram todos simétricos, tendo como eixo de simetria a bissetriz dos quadrantes ímpares. Verificando que se encontrava no caminho certo, foi incentivado a escrever a sua conjetura que pode ser observada na Figura 4.8.

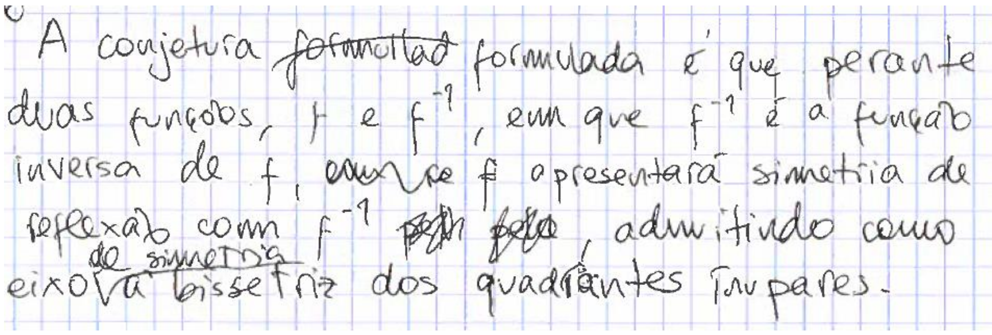

A conjetura ~~formulad~~ formulada é que perante duas funções, f e f^{-1}, em que f^{-1} é a função inversa de f, ~~em~~ f apresentará simetria de reflexão com f^{-1} ~~pel~~ ~~pela~~, admitindo como eixo de simetria a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Figura 4.8 – Registo da conjetura elaborada por Afonso na tarefa 1

A sua conjetura indica que duas funções inversas uma da outra apresentam simetria de reflexão, admitindo como eixo de simetria a bissetriz dos quadrantes ímpares. Na sua formulação, acabou por não referir a palavra "gráfico", ficando apenas subentendido que se referia à relação geométrica existente os gráficos das funções f e f^{-1} (onde f^{-1} representa a função inversa da função *f*).

Ainda no que diz respeito à conjetura, Afonso mostra saber que qualquer conjetura carece de demonstração. Admite que a sua conjetura é válida, embora não possa afirmá-lo com base na observação dos exemplos e indica, em seguida, que para a validar precisa de demonstrar que para qualquer ponto pertencente ao gráfico da função *f*, existe um ponto pertencente ao gráfico da função f^{-1} tal que o segmento de reta cujos extremos são esses dois pontos, tem como mediatriz a reta $y = x$. Durante o processo de demonstração, Afonso recorreu várias vezes à visualização, na calculadora, da representação gráfica das funções, optando por fazer um esboço, dos gráficos das funções h e h^{-1}, com $h(x) = 2x^2 + 1, x \geq 0$. Em seguida pareceu querer utilizar coordenadas de pontos concretos dos gráficos das funções h e da sua inversa para definir um segmento de reta, mas rapidamente abandonou esse raciocínio riscando e passando a pontos genéricos do tipo $(x, f(x))$ e $(f(x), x)$, respetivamente. O esboço do gráfico parece influenciar a escolha de pontos concretos, em vez de um qualquer ponto pertencente ao gráfico de uma função que admita inversa. Por outro lado, o abandono imediato sugere que Afonso tem noção que para fazer uma demonstração tem de considerar um qualquer ponto do gráfico, de uma qualquer função que admita inversa, necessitando escrevê-lo de forma genérica. A notação $(x, f(x))$ para designar um ponto que pertence ao gráfico da função, revelou-se complicada quando voltou a querer usar a letra x, para denominar as coordenadas de um ponto qualquer da bissetriz dos quadrantes ímpares. Recuou e alterou a notação, considerando um ponto A qualquer do gráfico de uma função f de coordenadas $(a, f(a))$ e consequentemente, um ponto $B(f(a), a)$ pertencente ao gráfico de f^{-1}. Esta necessidade de alteração de letra, pode prender-se com a notação a que está habituado a utilizar na determinação da equação da mediatriz de um segmento de reta, ou apenas por uma questão de facilidade, por ser um ponto pertencente à reta $y = x$. De qualquer forma, indica que o estudante sabe que tem de distinguir, de forma clara, os pontos da mediatriz e os que definem os extremos do segmento de reta.

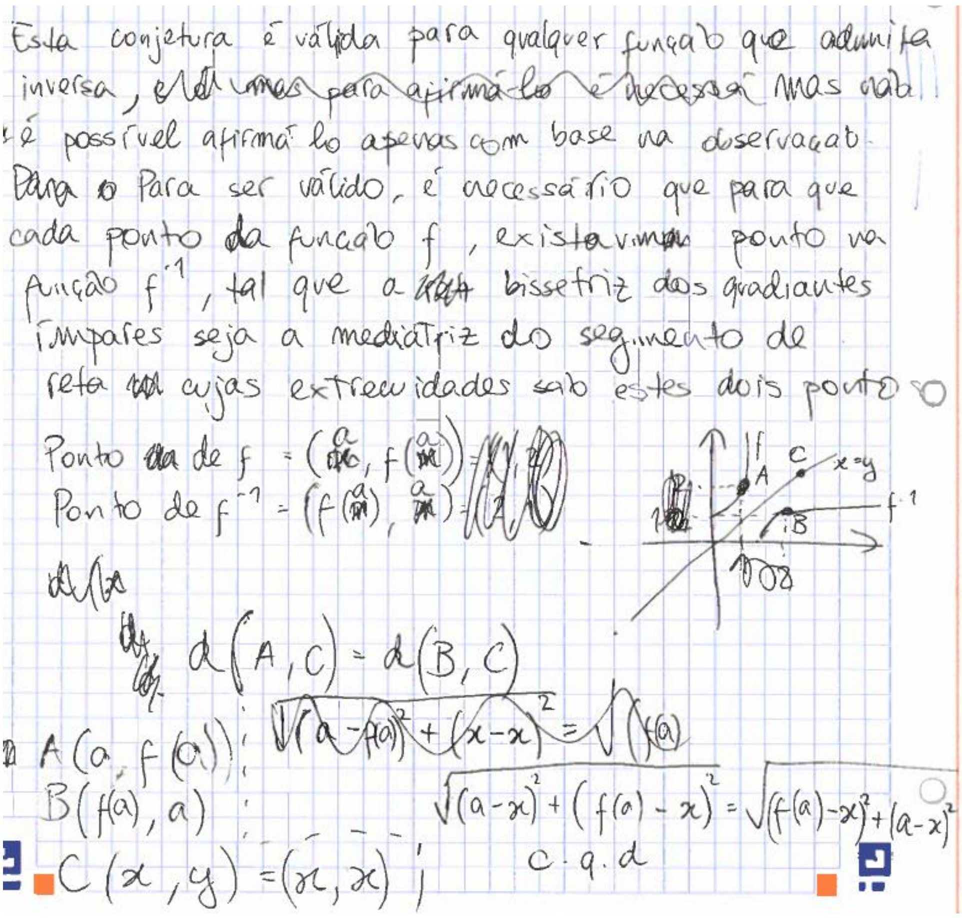


Figura 4.9 – Registo da dedução feita por Afonso na tarefa 1

Afonso terminou a realização da tarefa cerca de 25 minutos antes do tempo estabelecido e entregou a sua resolução de imediato.

No final, quando questionado sobre a tarefa respondeu:

A: Achei interessante, diferente. Não costumamos fazer este tipo de coisas. Obriga a pensar muito.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
A: Representar as funções na calculadora foi o mais fácil. Eu gosto de fazer isso. O mais difícil foi mesmo a conjetura e a demonstração.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
A: Sem dúvida. Acho que se não usasse a calculadora nunca ia conseguir criar nenhuma conjetura. Mesmo que desenhasse os gráficos iam ficar todos tortos e nunca me ia lembrar da relação entre as coordenadas dos pontos da função e da sua inversa, mesmo tendo observado isso nos pontos de interseção com os eixos. Com a calculadora estava a ver o que se passava com os vários exemplos, e o que era sempre comum a todos. E isso foi muito importante para a demonstração para criar pontos em comum. Ajudou-me essencialmente a estruturar as ideias e a definir a estratégia.

A análise das respostas sugere que embora a criação da conjetura e a sua demonstração tenham sido consideradas como a parte mais difícil da tarefa, a utilização da calculadora foi fundamental para criação da conjetura. A rápida e correta visualização da representação de parte dos vários gráficos das funções sugeridas nos exemplos parece ser essencial para a perceção da relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa.

A calculadora também, parece ter influência positiva na demonstração, nomeadamente na sua estruturação.

4.2.3. Tarefa 2

Na tarefa 2, pretende-se que os alunos demonstrem que o gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, tem concavidade voltada para cima quando $a > 0$ e tem concavidade voltada para baixo quando $a < 0$. Inicia com uma exploração de alguns exemplos de funções quadráticas, onde os alunos podem comparar declives de retas PQ e QP, em que P, Q e R são pontos que pertencem ao gráfico da função quadrática $\left(x_P < x_Q < x_R\right)$, com a concavidade do gráfico da função.

No início da tarefa 2, Afonso avançou na resolução sem dificuldades. Apenas questionou sobre como deveria utilizar a máquina para calcular os declives das retas, pois nunca o tinha feito e não sabia como se fazia. Pela observação feita durante a resolução da tarefa, notou-se que aluno utiliza a calculadora para a realização da tarefa, essencialmente, na primeira parte, ou seja, até à fase imediatamente anterior à formulação da conjetura. Nesta fase, o aluno faz inúmeras explorações, deslocando os pontos P, Q e R e comparando os declives das retas PQ e QP. Rapidamente encontra a relação existente entre a concavidade do gráfico da função quadrática e os declives das retas.

Sem hesitar, o aluno formula a seguinte conjetura: qualquer que seja a função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, o seu gráfico tem concavidade voltada para cima se $a > 0$ e tem concavidade voltada para baixo se $a < 0$. A conjetura que pode ser lida na Figura 4.10. Nesse momento, a investigadora pode observar que o aluno não precisou de analisar nenhum gráfico anteriormente representado na calculadora gráfica. Esta atitude sugere que o aluno tem presente a relação existente entre o coeficiente a e a concavidade do gráfico de uma função quadrática da forma $ax^2, a \neq 0$, não sentido necessidade de efetuar mais explorações.

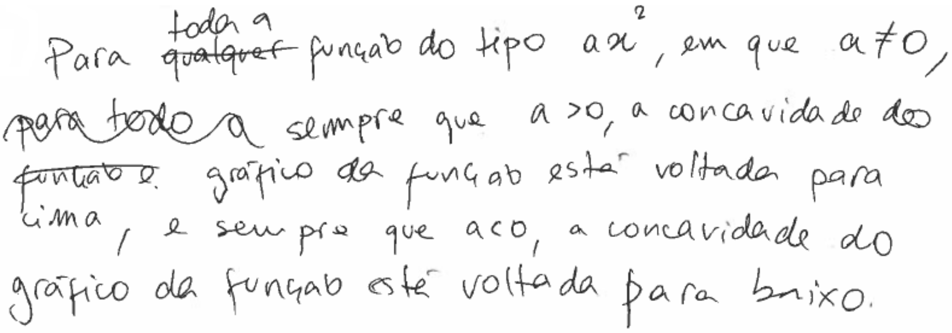
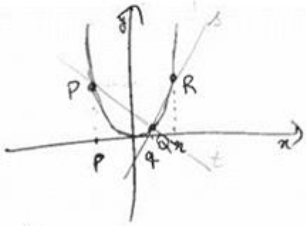

Para ~~qualquer~~ toda a funçao do tipo ax^2, em que $a \neq 0$, ~~para todo~~ a sempre que $a > 0$, a concavidade do ~~funtão e~~ gráfico da funçao estar voltada para cima, e sempre que $a < 0$, a concavidade do gráfico da funçao esté voltada para baixo.

Figura 4.10 – Conjetura elaborada por Afonso na tarefa 2

Na fase de demonstração do resultado, Afonso voltou a observar e manusear os últimos gráficos que tinha na calculadora. Após algum tempo (cerca de 5 min) fez um esboço do gráfico de uma função do tipo ax^2, $a \neq 0$ e chamou a investigadora dizendo que estava um pouco perdido. Na sequência, desta afirmação a foi-lhe dito para voltar a reler, com calma, a informação dada no início da tarefa e rever a relação que tinha encontrado, em alíneas anteriores, entre o sentido da concavidade do gráfico da função e o declive das retas PQ e QR. Seguidamente questionou: "Então basta calcular os declives das retas e ver que verificam a relação que pretendemos, certo?". A rápida resposta de Afonso parece indicar uma capacidade de interpretação considerável, relacionando rapidamente o resultado que pretende demonstrar com o modo como o deve fazer. Após o assentimento, avançou no processo de demonstração. Começou por marcar no esboço do seu gráfico cartesiano três pontos, P, Q e R e as duas retas PQ e QR, e prosseguiu com o cálculo dos declives de cada uma dessas retas. Usando as relações de ordem entre as abcissas dos pontos P, Q e R e as propriedades decorrentes, mostrou rapidamente o resultado que pretendia, isto é, se $a > 0$ então o declive da reta PQ é inferior ao declive da reta QR, logo o gráfico de uma função quadrática do tipo ax^2 tem concavidade voltada para cima e se $a < 0$ então o declive da reta PQ é superior ao declive da reta QR, logo o gráfico da função tem concavidade voltada para baixo. Nota-se em toda a sua demonstração, à exceção da conclusão final, que o aluno não sente necessidade de utilizar linguagem natural para apoiar e estruturar a sua demonstração, optando sempre por utilizar linguagem matemática. A resposta de Afonso pode ser observada na Figura 4.11.

Mesmo não tendo utilizado a calculadora durante a realização da demonstração, o facto do aluno sentir necessidade de esboçar um gráfico de uma função quadrática e as duas retas que o intersetam em três pontos, poderá indicar alguma influência da utilização da calculadora, relacionando o processo utilizado durante a exploração de casos concretos, com a estruturação da demonstração.



$P\,(p, ap^2)$
$Q\,(q, aq^2)$
$R\,(r, ar^2)$

$$mPQ = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} = \frac{(aq - ap)(aq + ap)}{q - p} =$$

$$= \frac{a(q-p)\,a(q+p)}{q-p}$$

$$= a \times (q+p)$$

$$= aq + ap$$

$$mQR = \frac{ar^2 - aq^2}{r - q} = \cancel{((ar - aq)(r+q))}$$

$$= \frac{(ar - aq)(r+q)}{r-q}$$

$$= a\,(r+q)$$

$$= ar + aq$$

$p<q<r$

$p<r$

$\cancel{a(q+p)<}\ q+p < r+q$

Se a >0,

$$a(q+p) < a(r+q)$$

Se $a<0$,

$$a(q+p) > a(r+q)$$

Logo, quando $a>0$, a concavidade do gráfico é voltada para cima e quando $a<0$, a concavidade do gráfico é voltada para baixo.

Figura 4.11 – Dedução realizada por Afonso na tarefa 2

Na entrevista, realizada no fim da tarefa Afonso considera que, embora inicialmente, esta tarefa fosse mais difícil que a anterior, destaca a demonstração como a parte mais difícil de fazer. Tal dificuldade parece surgir do facto do aluno não conhecer o resultado necessário à demonstração.

I: O que achaste da tarefa?
A: Um bocado grande. Esta foi mais complicada de perceber, ao princípio, mas depois o raciocínio era sempre igual e ficou mais aceitável.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
A: O mais difícil é sempre a demonstração. Não me lembro logo o que tenho de fazer. Mas depois de falar com a stora e ter lido o que estava no início fez-se luz.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
A: Nesta acho que não. Já conhecíamos o resultado do 9.º ano por isso foi simples fazer a conjetura. Nesta ficha usei mais a calculadora para verificar que o que estava no enunciado era verdade. Esse resultado eu não conhecia. Sem essa informação não iria conseguir fazer a demonstração. No entanto, o facto de poder usar a calculadora ajudou a ter mais confiança no que estava a fazer. Com a calculadora era muito mais fácil marcar os pontos, tendo em conta a ordem que devia haver nas abcissas e saltar entre vários exemplos.

Afonso reconhece que já sabia como relacionar o sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real do tipo $ax^2, a \neq 0$, com o sinal do coeficiente a, pelo que a formulação da conjetura surge de forma natural. Refere, no entanto, que a utilização da calculadora lhe deu mais confiança. Tal poderá querer dizer, que embora não a tenha utilizado no momento concreto da demonstração, possa ter utilizado a informação que visualizou durante o que experienciou na resolução das alíneas anteriores. Contudo a informação escrita, dada no início da tarefa parece ter tido um papel mais importante no raciocínio lógico usado do que a exploração efetuada com a calculadora gráfica.

4.2.4. Tarefa 3

A terceira tarefa tinha como objetivo determinar as coordenadas do vértice de uma parábola. Afonso resolveu todas as questões de forma correta e rápida. Conseguiu facilmente encontrar a relação que era esperada entre os coeficientes a, b e c e as coordenadas do vértice das parábolas enunciando corretamente a conjetura que daí decorria e que pode ser observada na Figura 4.12.

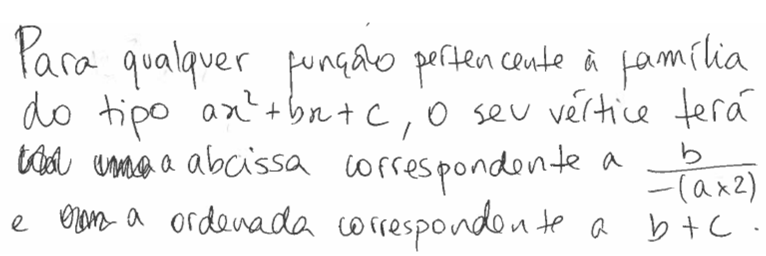


Figura 4.12 – Conjetura elaborada por Afonso na tarefa 3

Verificando que a sua conjetura falhava para os exemplos da segunda questão, mostrou-se pouco confiante ao avançar para a demonstração que lhe era solicitada. Mostrou dificuldade em estruturar a sua demonstração de acordo com as sugestões feitas no enunciado da tarefa. Ao verificar que estava um pouco perdido, a investigadora perguntou-lhe se se lembrava do método de completar o quadrado, que tinha revisto com eles, no início da sessão antes de ter distribuído a tarefa. Perante a questão, respondeu "mais ou menos", mas escreveu de imediato, na folha de resolução, o quadrado do binómio e o seu desenvolvimento. Este impulso, foi suficiente para que conseguisse escrever a função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x-h)^2 + k$. No entanto, voltou a mostrar algumas dificuldades, revelando que não sabia o que fazer a partir dali. A investigadora perguntou-lhe se tinha conhecimento das coordenadas do vértice de uma parábola especifica. Respondeu que no 9.º ano tinham dado que o vértice da parábola que se obtém da função $f(x)= x^2$ tem coordenadas (0,0). Nesse momento foi-lhe sugerido que considerasse essa função. Consequentemente, perguntou: "E agora? Parto daqui…já sei, mas e a seguir? Estou perdido". A investigadora perguntou-lhe se se lembrava das relações entre o gráfico de uma função e os gráficos das funções $f(x\text{-}c)$, $f(x)+c$ e $af(x)$, $c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, conteúdo lecionado uma semana antes da realização da tarefa. "Ah, pois é, agora que pergunta, tem tudo a ver", foi a sua resposta. Embora não tenha colocado na folha de resolução, Afonso usou a calculadora gráfica para observar alguns exemplos concretos. Começou por dar valores concretos a h, quer positivos quer negativos e foi verificando as coordenadas do vértice das parábolas. Em seguida deu valores a a e verificou que este não influenciava as coordenadas do vértice. Procedeu de modo análogo dando valores ao parâmetro k, recorrendo sempre a exemplos antes de concretizar a demonstração. À medida que ia observando os gráficos na calculadora, ia tentando generalizar os resultados. Na folha de resposta apenas esboçou três gráficos cartesianos. Começou por fazer o esboço do gráfico da função x^2, indicando as coordenadas do vértice (0,0). Seguiu-se o esboço do gráfico de uma função do tipo $a(x-h)^2, a > 0, h > 0$ indicando que neste caso o gráfico da função x^2 sofre uma translação associada ao vetor $(h, 0)$. Por último esboçou o gráfico de uma função do tipo $a(x-h)^2 + k, a, h, k \in \mathbb{R}^+$, justificado que este se obtém do gráfico da função x^2 pela translação associada ao vetor de coordenadas (h, k). Conclui então que para qualquer função real de variável real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ as coordenadas do vértice do seu gráfico são (h, k) com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$. A sua demonstração, pode ser observar na Figura 4.13.

.

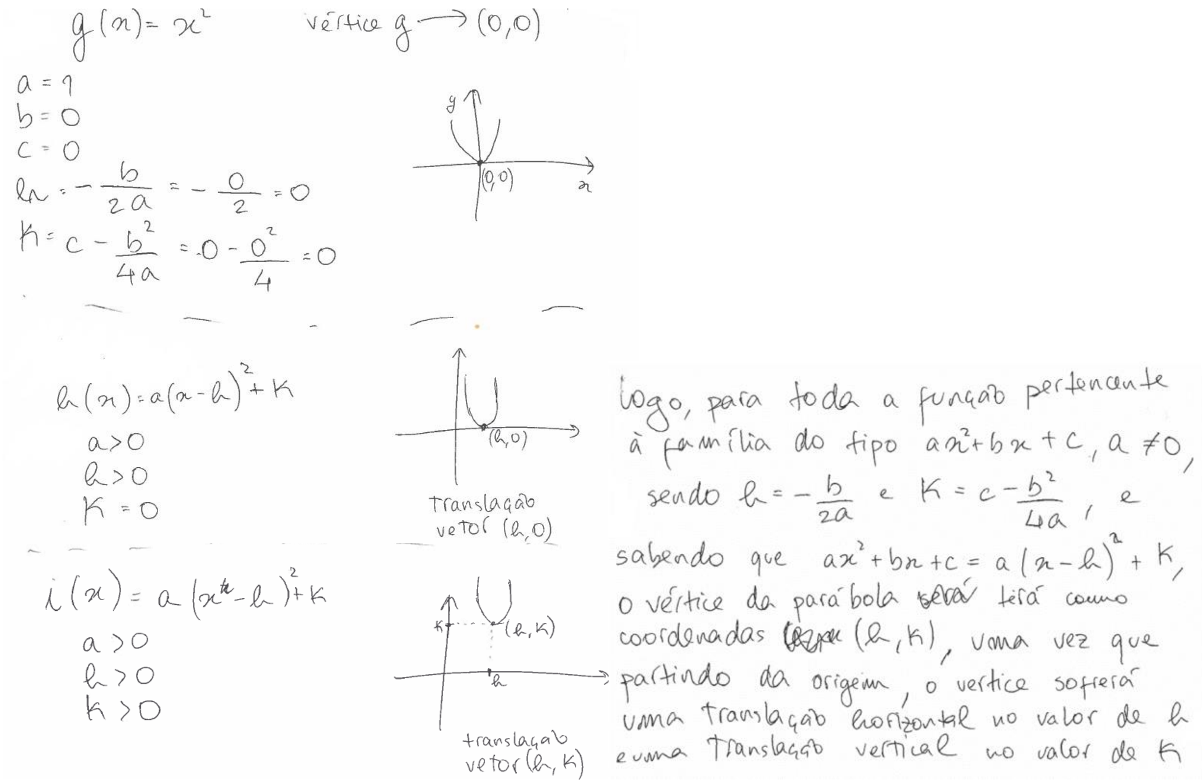


Figura 4.13 - Dedução realizada por Afonso na tarefa 3

Nesta tarefa, a sua demonstração apenas considerou o caso em que $a > 0$, generalizando depois para $a \neq 0$ sem fazer mais nenhuma referência. Note-se que, embora tivesse conhecimento prévio sobre as coordenadas do vértice e tivesse mostrado que $ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$, verifica que quando b e c são nulos então h e k também o são.

Depois de entregue a tarefa, Afonso expressa o seu agrado pela tarefa. A sua resposta ao que achou mais difícil sugere logo que os exemplos que visualizou ajudaram na criação da conjetura.

I: O que achaste da tarefa?

A: Achei a tarefa bastante interessante, pois nunca tinha pensado em funções desta maneira tão "manipulável". Nesta tarefa acho que, também, foi preciso mais concentração do que nas outras.

I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?

A: Não sei o que foi mais fácil, mas o mais difícil foi criar a conjetura e fazer a demonstração. Mas depois com vários exemplos tornou-se mais fácil encontrar o ponto em comum.

I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?

A: Sim, ajudou mesmo muito. Sem usar calculadora não sei se conseguia e mesmo que conseguisse, ia demorar muito mais tempo. Provavelmente ia dar muito mais voltas e ia ficar mais perdido. A calculadora ajudou a poder ver de forma rápida e correta o gráfico de várias funções que foram essenciais para fazer a demonstração.

A última resposta parece indicar que a utilização da calculadora assume um papel extremamente importante no processo de demonstração. Esta ferramenta aparenta servir de guia nesse processo.

4.2.5. Comentário Final

Todo o percurso de Afonso durante o estudo sugere que ele sabe o que é uma demonstração. Considera-a um raciocínio lógico, que estabelece a veracidade de uma afirmação e atribui-lhe funções de convencimento, explicação, descoberta e desafio intelectual. Durante a resolução das tarefas, sabia sempre o que pretendia, mesmo que por vezes mostrasse algumas dúvidas ou hesitações iniciais. Para ele, a utilidade da demonstração vai muito além do convencimento da veracidade de uma afirmação. A demonstração é útil porque auxilia a compreensão e aquisição do conhecimento matemático.

Durante a realização das tarefas, trabalhou sem grandes orientações da investigadora. No entanto, nas duas primeiras tarefas mostrou-se mais autónomo, sendo que na última necessitou que a investigadora lhe fizesse algumas perguntas, para que conseguisse reorganizar as suas ideias e definir uma linha orientadora. Afonso efetuou todas as tarefas sem demonstrar grandes falhas ao nível de conhecimentos matemáticos, quer teóricos, quer práticos e apresenta também uma capacidade de abstração considerável. No entanto, nas suas resoluções nota-se a ausência de símbolos de implicação ou justificações de alguns passos. Essencialmente na primeira e terceira tarefas, recorreu frequentemente à calculadora para análise dos gráficos sugeridos ou visualização dos gráficos de funções definidas por ele. O facto de recorrer à calculadora gráfica, para visualizar os gráficos de exemplos concretos pode sugerir que estes o ajudam a organizar ideias, a compreender determinadas situações e a estruturar a demonstração. Sempre que foi necessário corrigiu as opções que tomou e que inviabilizavam o decorrer da demonstração. Foi sempre muito sucinto na escrita e preferiu a linguagem Matemática à linguagem corrente.

Após a última tarefa, quando questionado sobre qual das tarefas mais tinha gostado referiu de imediato a terceira.

I: Qual a tarefa de que mais gostaste? Porquê?
A: A última. Embora fosse a que exigisse mais concentração, a forma como consegui passar dos exemplos para a demonstração tornou-se muito intuitivo. Parecia assim uma coisa dinâmica. A calculadora ajudou imenso no processo de visualização e na forma como pensei depois em passar para o papel o queria demonstrar.

As respostas do aluno mostram, em quase todas as tarefas, que se apoiou fortemente na calculadora, quer na criação das conjeturas, quer posteriormente no desenvolvimento da demonstração. Apenas na segunda tarefa, não faz tanta referência à utilização da mesma, mencionando que, no caso concreto, o resultado a conjeturar já era conhecido. Mesmo nesta tarefa, Afonso refere-se à calculadora como uma mais valia no processo de compreensão das informações dadas na parte inicial. Segundo parece, mesmo sem associar a ligação, o aluno socorre-se da calculadora para o esboço do gráfico que apresenta na resolução, e a partir do qual estrutura o início da sua demonstração.

4.3. Matilde

Matilde é a mais velha, iniciou o 10.º ano com 16 anos. É de todos a mais tímida, característica que se revela na fraca participação em aula e em dificuldades em expor as suas dúvidas perante a turma (fá-lo com maior facilidade individualmente em aulas de resolução de exercícios). É uma aluna trabalhadora e muito organizada em sala de aula, mas nem sempre faz os trabalhos de casa. Recorre à mecanização dos exercícios trabalhados em aula para ter sucesso à disciplina. Por vezes apresenta alguma dificuldade em manter uma sequência lógica no raciocínio. Apresenta dificuldades na utilização correta de linguagem Matemática.

Durante todo o terceiro ciclo, bem como no exame de final de ciclo, Matilde obteve sempre nível 4 à disciplina de Matemática. No 10.º ano, tem conseguido ter positiva à disciplina de Matemática A, tendo obtido classificação de 12 valores nos primeiro e 2.º períodos.

Durante a entrevista afirmou que a Matemática é importante, porque está presente em muitas coisas, mas que há muitas matérias dadas nas aulas que acha não terem aplicação. Pelo menos, no momento não consegue ver a sua aplicação, o que torna a Matemática muito abstrata. Refere que o que mais gosta na Matemática é "fazer contas", gosta dos polinómios e radicais porque "é só treinar". O que menos gosta é de geometria, porque requer muita abstração.

4.3.1. Demonstração – noção e importância

Matilde, durante a sua entrevista, mostra não entender o que é uma demonstração. Segundo a aluna demonstração é algo que ocorre em contexto de vida real e que é explicado com base na Matemática, utilizando cálculos e raciocínios adequados que podem levar ou não a uma conclusão. Associa demonstrações a resoluções de exercícios e de exemplos. Embora diga que a demonstração serve para mostrar um resultado, as restantes respostas levam a crer que deverá estar a associar ao resultado de um exercício.

I: O que é, para ti, uma demonstração Matemática?
M: É algo que nos é explicado com base na Matemática. Alguma coisa que aconteça no nosso dia a dia e depois pode ser relacionado com a Matemática. É conseguir usar cálculos, e certos pensamentos para nos levarem a uma conclusão, ou não.
I: Para que achas que serve a demonstração?
M: Serve para mostrar, um resultado de Matemática.

Ao pensar na utilidade das demonstrações afirma achar que são interessantes. Refere-se à resolução de exercícios, como úteis para a aprendizagem.

I: Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?
M: Sim, eu pessoalmente acho que sim. Até acho interessante. Acompanhar o processo de como se faz, também, nos faz pensar mais nas coisas. É muito melhor do que nos darem logo a solução. Quando nos mostram um exemplo, devem explicar porque isso ajuda-nos a perceber melhor.

Ao ser questionada sobre se costuma fazer demonstrações em aula, Matilde não estranha a pergunta, continuando a mesma linha de raciocínio. Questionada sobre a sua resposta reflete um pouco e associa a demonstrações ao que se faz em aula, usando letras, embora ainda com pouca confiança.

I: Costumas fazer demonstrações na aula de Matemática?
M: Acho que sim, hoje por exemplo, quando estávamos a falar das funções a professora disse aquilo do x ser mentiroso, depois mostrou-nos que era verdade com um exemplo.
I: E acha que isso foi uma demonstração?
M: Sim, acho que sim. Foi um exemplo, mas era verdade e é mais fácil de compreender. Também, é verdade que era só um exemplo, mas também é um bocado difícil fazer para todos os casos. Não sei professora, estou um bocado confusa. Ou será que a demonstração é quando usamos as letras como fizemos a semana passada? Ah, sim agora acho que é isso. É quando usamos letras, não é? Estou mesmo confusa, mas acho que é isso.

Sempre insegura quanto às suas respostas, refere que são os professores que fazem as demonstrações no quadro e a primeira vez que viu uma foi no 9.º ano.

I: A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
M: Pensando que estamos a falar em mostrar com as letras, acho que foi no 9.º, mas principalmente, este ano. Este ano, vemos muito mais demonstrações. Nos outros anos também tivemos professores a Matemática que eram assim "coisos" e nós estávamos muito mal preparados. Este ano vejo muito mais, mesmo.
I: Como e por quem eram feitas?
M: Eram feitas pelo professor. Normalmente, o professor faz no quadro e nós passamos para o caderno.

Matilde apresenta um discurso pouco coerente. Mesmo depois de, por momentos, ter surgido na sua resposta o caminho certo, as suas respostas sugerem, fortemente, que continua a pensar em demonstrações como se fossem exercícios. Assume não saber como se sentiu a primeira vez que fez uma demonstração, garantindo que ajudavam. As suas referências aos exemplos são notórias do não entendimento, do que é uma demonstração.

I: Como te sentias na altura?
M: Quando? Entre o 1.º ano e 5.º, ou agora?
I: Na altura em que começaram a fazer demonstrações.
M: Não sei, mas acho que ajudava bastante. Quando nós tínhamos dúvidas, depois o professor fazia uma demonstração ou um exemplo e percebia melhor. Depois já sabia aplicar a alguns casos, não a todos.
I: E atualmente, como te sentes?
M: Agora continuo a sentir o mesmo.
I: Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas?
M: Mais…mais. Acho que ajudava.
I: E quem achas que as deveria fazer? Porquê?
M: Os professores, porque se nós se não estamos a perceber muito bem a matéria é um bocado difícil demonstrarmos. Ao dar-nos um exemplo daquilo que se está a passar ajuda. Quando o professor vê que estamos com muitas dúvidas, faz uma demonstração, e eu acho que ajuda sempre.

Mesmo após a entrevista Matilde mostra grande dificuldade em perceber o que é uma demonstração. A investigadora conversa com ela tentando explicar-lhe o que é uma demonstração e conversando sobre demonstrações que tinham sido realizadas em sala de aula, mas no discurso de Matilde, o exemplo aparece sempre associado à demonstração.

4.3.2. Tarefa 1

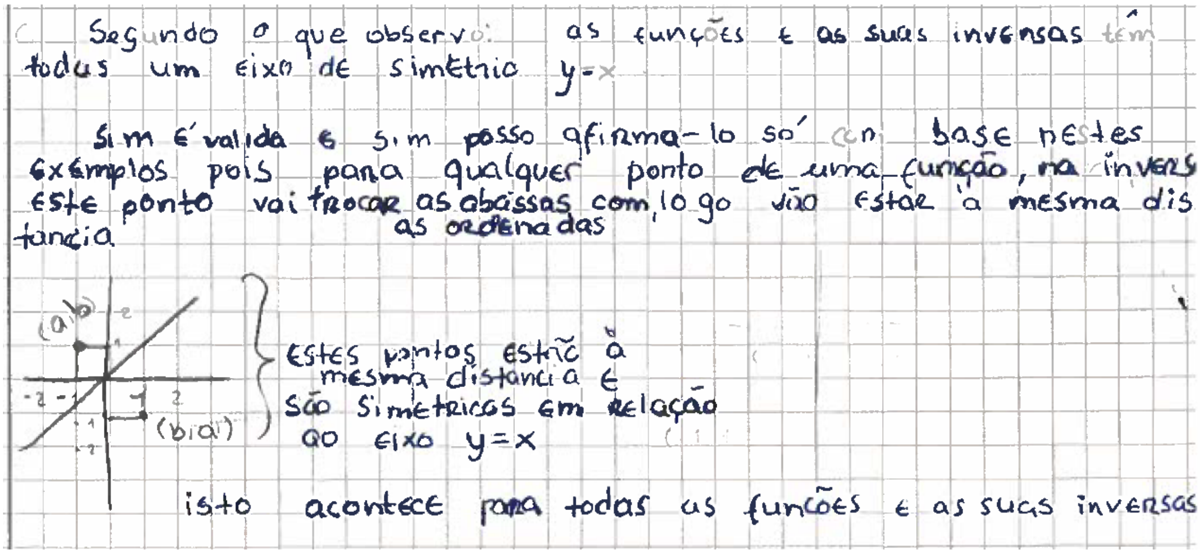
Matilde mostrou-se interessada e curiosa na tarefa “Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa”. Raramente solicitou a intervenção da investigadora, fazendo-o apenas quando se sentiu incapaz de avançar. Resolveu as primeiras questões com algumas dificuldades, que se prenderam com a dificuldade de manuseamento da calculadora gráfica. Para ultrapassar as dificuldades chamou a investigadora, apenas por duas vezes. Tomou notas das informações, relativas aos menus a utilizar, e aplicou-as sempre que necessitou, durante a sua resolução da tarefa. Na primeira questão desta tarefa era pedido para indicar os pontos de intersecção com os eixos coordenados da função real de variável real definida por $f(x) = 2 + x^3$. Embora a abcissa do ponto de interseção com o eixo Ox seja um número irracional, Matilde não sente necessidade de a determinar analiticamente, apresentando-a com um arredondamento às décimas.

Demorou muito tempo para escrever a sua conjetura. Observou durante longos períodos de tempo as representações gráficas que tinha na calculadora, alternando entre elas. Observando que Matilde não avançava, e aproveitando a representação gráfica da função que a aluna observava no momento, a investigadora perguntou-lhe se não encontrava nenhuma relação geométrica entre o gráfico da função e o da sua inversa.

M: Só consigo ver que a reta $y = x$ é um eixo de simetria dos gráficos. E vejo isso em todos os exemplos.
I: E achas que isso se verifica sempre que uma função admita inversa?
M: Acho que sim.
I: Então porque não escreves?
M: Não sabia que era isso. Nunca tinha ouvido falar em conjetura e não sabia o que era.

Esta intervenção de Matilde, sugere que a aluna consegue estabelecer a relação desejada através do uso da calculadora. Mostra ainda que a falta de conhecimento do significado dos termos utilizados na tarefa (neste caso, conjetura) se apresenta como uma barreira à sua resolução.

Matilde avançou para a escrita da sua conjetura e quase de imediato tenta realizar a sua demonstração, que podem ser observadas na Figura 4.14. Ao formular a conjetura, não sente necessidade de se referir ao gráfico ou à representação gráfica das funções, escrevendo apenas “as funções e as suas inversas têm todas um eixo de simetria $y = x$”. Contudo, deixa transparecer a relação geométrica encontrada, através da exploração efetuada, entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa. Em seguida a aluna afirma que, a conjetura que formulou é válida apenas com base na observação dos exemplos. Tal sugere que a aluna não entende o significado de conjetura e que esta carece de demonstração.



Segundo o que observei as funções e as suas inversas têm todas um eixo de simetria y=x

Sim é valida e sim posso afirma-lo só com base nestes exemplos pois para qualquer ponto de uma função, na inversa este ponto vai trocar as abcissas com as ordenadas logo vão estar à mesma distancia

Estes pontos estão à mesma distancia e são simétricos em relação ao eixo y=x

isto acontece para todas as funções e as suas inversas

Figura 4.14 – Registo da conjetura e da dedução elaboradas por Matilde na tarefa 1

O início da resolução remete para uma estratégia que permitiria desenvolver a demonstração, pois Matilde marca, no referencial cartesiano, dois pontos genéricos de coordenadas (a, b) e (b, a), que de acordo com o que escreve anteriormente pertencerão, respetivamente, aos gráficos de uma qualquer função f e ao da sua inversa (note-se que se está sempre a considerar, nesta tarefa, funções reais de variável real que admitem inversa). No entanto, não consegue concluir essa estratégia, não realizando a demonstração. Indica que os pontos de coordenadas (a, b) e (b, a) estão à mesma distância (embora não especifique, pelo esboço apresentado parece querer indicar que se encontram à mesma distância da reta $y = x$) e como tal são simétricos, tendo como eixo de simetria a reta $y = x$. Porém, a aluna não tenta demonstrar a sua afirmação. Esta atitude, pode sugerir que, para a aluna, tendo em conta que a sua conjetura funcionou para todos os exemplos observados, a aceita como verdadeira.

Matilde demorou 100 minutos para resolver esta tarefa. Entregou-a, dizendo que tinha terminado e expressando que a tarefa tinha contribuído para a aquisição de novos conceitos matemáticos.

I: O que achaste da tarefa?
M: Foi uma atividade bastante interessante e fez-me ganhar interesse em trabalhar na calculadora gráfica e tentar entender o que são conjeturas.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
M: O mais fácil acho que foi trabalhar com a calculadora para resolver os exercícios e o mais difícil foi chegar a uma conjetura, porque não sabia o que era.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
M: A calculadora não me ajudou na conjetura, mas sim na demonstração, pois pude verificar esta conjetura para várias funções. Foi pela observação dos gráficos na calculadora que, consegui ver que a relação entre os gráficos das funções e das inversas era sempre verdade.

A análise da entrevista de Matilde, sugere que a visualização e verificação da relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa, para os três exemplos propostos é suficiente para validar o resultado sem sentir necessidade de o demonstrar. Contudo, está convicta que realizou a demonstração. O facto de ter utilizado ‘letras’ é suficiente para ela, o resultado é intuitivo e não sente necessidade de o demonstrar analiticamente.

I: E achas que conseguiste demonstrar?

M: Sim, professora dava para ver pelos exemplos. E eu usei as letras aqui no gráfico. Dá para perceber os pontos de coordenadas (a, b) e (b, a) estão à mesma distância da reta $y = x$.

No que se refere à utilização da calculadora foi possível observar que teve influência na resolução da tarefa, nomeadamente, facilitou a formulação da conjetura. Contudo, no caso de Matilde, nesta tarefa, a sua utilização, parece ter favorecido uma abordagem experimental subestimando a demonstração dedutiva.

4.3.3. Tarefa 2

No início da segunda tarefa, “Sentido da concavidade do gráfico de função quadrática”, Matilde mostrou algumas dificuldades em entender o que se pretendia na tarefa. Também, evidenciou muitas dificuldades ao trabalhar com a calculadora, mais concretamente na parte de construção que era exigida. Nessa fase, necessitou de algum apoio da parte investigadora, que a auxiliou a manusear com a calculadora ao nível dos menus a utilizar. Depois de ultrapassadas as dificuldades, Matilde resolveu as primeiras questões autonomamente, socorrendo-se da calculadora para as resolver. Durante esses momentos, a investigadora observa que a aluna relê as informações iniciais dadas na tarefa e observa um dos seus gráficos, realizando experiências, parecendo que tenta um paralelismo entre a informação e a observação. Esta ação, parece indicar a utilização da calculadora gráfica auxilia na compreensão da informação fornecida. Quando lhe é pedido para escrever a conjetura sobre o sentido de concavidade do gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, escreve-a sem revelar dificuldade e de acordo com o esperado. A sua conjetura pode ser lida na Figura 4.15.

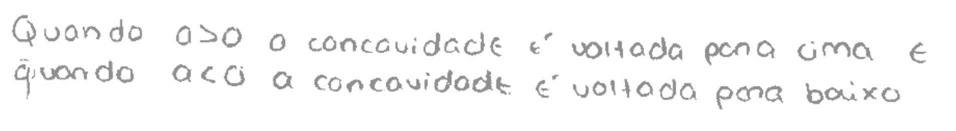


Figura 4.15 – Conjetura elaborada por Matilde na tarefa 2

Na fase de demonstração a aluna, tal como na tarefa 1, volta a basear-se em exemplos para justificar a sua conjetura, não conseguindo realizar a demonstração. Mais uma vez, começa por iniciar de uma forma correta considerando três pontos quaisquer, P, Q e R, pertencentes ao gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$. Opta por fazer um esboço de uma função quadrática, apoiando-se na representação gráfica das funções, que explorou na fase inicial da tarefa. Embora o gráfico não corresponda à representação de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, pode sugerir uma esquematização para organização do processo de raciocínio a desenvolver. No entanto, não consegue desenvolvê-lo e logo em seguida, volta a basear-se na análise do gráfico de uma função quadrática, mais concretamente da função definida por $2x^2$, para o estudo do caso em que $a > 0$. Recolhe alguns declives das retas PQ e QR, que obtém movimentando os pontos P, Q e R pertencentes ao gráfico da respetiva função, concluindo que o declive da reta PQ é menor que o declive da reta QR. Apercebendo-se do tempo decorrido até ao momento, Matilde, opta por inventar valores para os declives das retas, quando quer estudar o caso em que $a < 0$. Usa os valores simétricos dos que que tinha obtido no caso anterior. Questionada sobre a razão de estar a fazer aquilo, Matilde afirma saber pelos exemplos anteriores que o declive da reta PQ vai ser sempre maior que o declive da reta QR e por questão de tempo foi levada a fazer essa opção para conseguir terminar. Afirma também que se tivesse tempo, com alguma paciência, conseguia encontrar retas com aqueles declives, não sentindo a necessidade de verificar o que está a considerar. Mais uma vez, a aluna generaliza os resultados considerando-os válidos sem os demonstrar analiticamente. No final, da resolução apresentada, com base no exemplo considerado, conclui que fica provado que se $a > 0$ o gráfico da função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$ tem concavidade voltada para cima e se $a < 0$ então o seu gráfico tem concavidade voltada para baixo, tal como se pode observar na Figura 4.16.

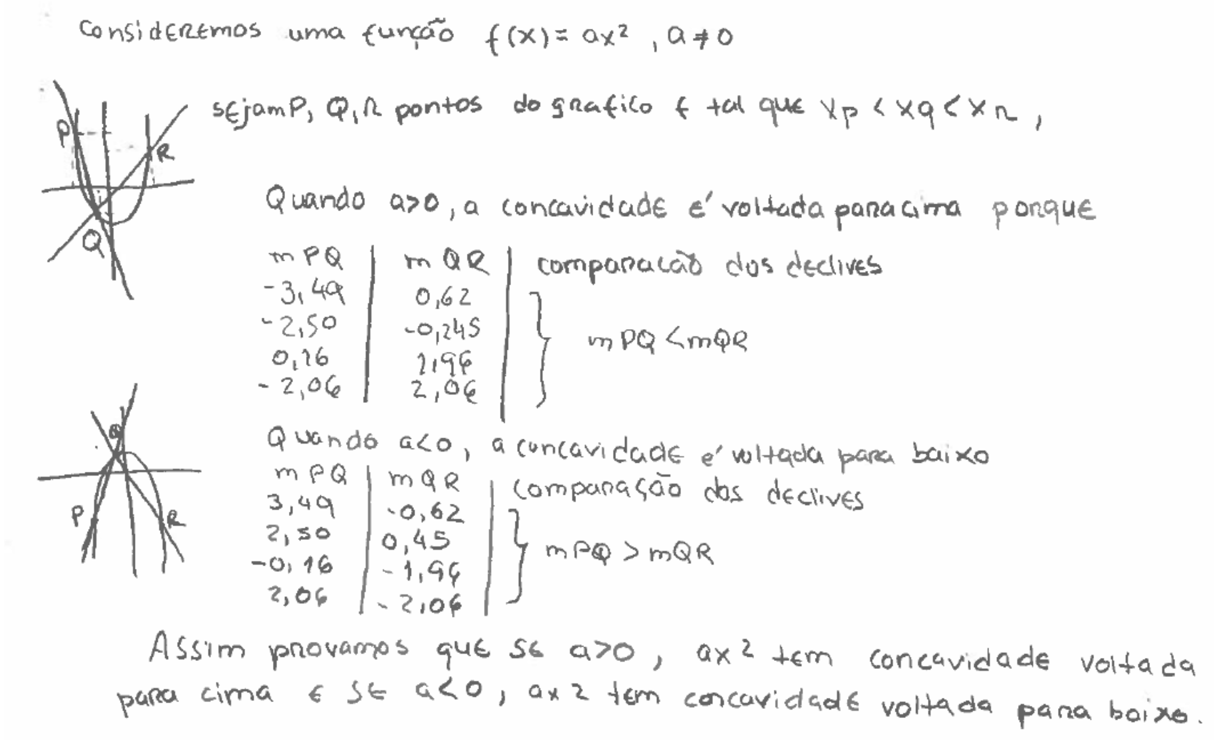


Figura 4.16 – Dedução realizada por Matilde na tarefa 2

Terminado o tempo, Matilde entrega a sua resolução, mostrando-se convicta quanto à validade da sua demonstração.

I: O que achaste da tarefa?
M: Achei interessante descobrirmos conjeturas para algo que não costumamos pensar muito. Sobre como o sentido das concavidades dos gráficos das funções se relacionam com declives de retas.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
M: Não achei uma atividade muito difícil. A parte mais difícil, foi entender o que se pedia, no início, para relacionar os sentidos das concavidades com os declives da reta.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
M: Não, acho que calculadora não me ajudou na criação da conjetura, mas ajudou na sua demonstração.

Indicou, que a maior dificuldade sentida foi a interpretação do texto inicial da tarefa. Já a utilização da calculadora é mencionada como facilitadora da demonstração (que a aluna não consegue realizar). Estas afirmações parecem ocorrer, por a aluna continuar sem saber o que é uma demonstração e validar a sua conjetura com a generalização do que observa nos seus exemplos. Por seu turno, é de realçar o interesse que a aluna afirma ter no processo de descoberta que efetua aquando da sua exploração com recurso à calculadora gráfica.

4.3.4. Tarefa 3

Na última tarefa "Coordenadas do vértice de uma parábola", Matilde mostrou-se muito autónoma na resolução da tarefa, tendo solicitado a ajuda da investigadora, somente na parte da demonstração. Nota-se que tinha mais confiança no trabalho com a calculadora, conseguindo facilmente e com relativa rapidez representar graficamente as seis funções quadráticas da primeira questão, bem como determinar as coordenadas do vértice de cada uma delas. A investigadora observou que a aluna conseguiu descobrir, rapidamente, uma relação entre a ordenada do vértice e os coeficientes a, b e c (quando considerada uma função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c, a \neq 0$). Mesmo não se passou relativamente à abcissa do vértice. Neste caso, levou muito tempo. Para interpretar e relacionar a informação disponível, apoiando-se em cálculos para o conseguir fazer. Consegue escrever uma conjetura para a abcissa e ordenada do vértice, de acordo com o esperado, não indica que as coordenada se referem ao vértice da parábola, tal como se verifica na Figura 4.17.

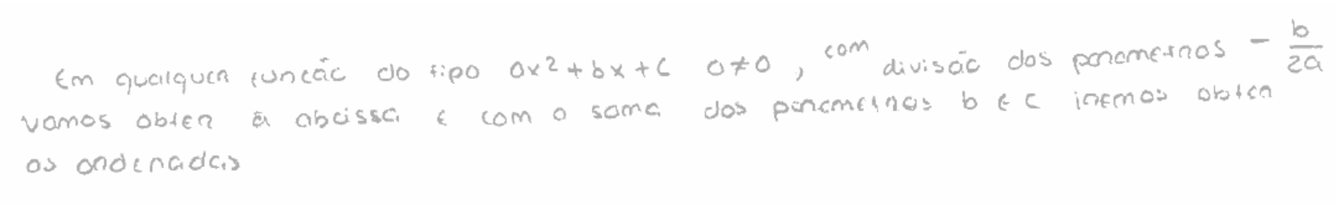


Figura 4.17 – Conjetura elaborada por Matilde na tarefa 3

Esta omissão parece poder ser explicada por falta de concentração ou, também pode sugerir que a aluna não tenha sentido a necessidade de o referir, por estar explícito na questão posta na tarefa.

Pela observação efetuada parece que Matilde aparenta surpresa ao verificar que a sua conjetura não se verifica para a ordenada do vértice da parábola. Tal situação, fá-la voltar a trás para tentar encontrar outras relações entre as coordenadas do vértice e os parâmetros da função quadrática do tipo $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Esta reação não pareceu estranha à investigadora, dado que, em todas as outras tarefas a aluna tinha justificado a validade das conjeturas apenas com a observação dos exemplos. Por outro lado, esta é a atitude normal, a de tentar encontrar novas conjeturas à medida que se vão refutando as feitas inicialmente. No entanto, a investigadora achou por bem abordar a aluna para a tentar perceber o motivo pelo qual tinha voltado atrás.

I: Porque voltaste atrás? Não tinhas feito já esta parte?
M: Sim professora, mas acho que está mal?
I: Porquê?
M: Porque agora fiz as contas e a conjetura que fiz não deu. Tenho de descobrir onde errei.
I: Por vezes fazemos conjeturas erradas é por isso que necessitam de ser demonstradas.
M: Mas assim, não sei como vou fazer. Tenho de usar só letras? Não sei se consigo.

Não querendo influenciar mais, a investigadora apenas a encorajou a continuar. Esta conversa de Matilde, sugere que a aluna ainda não tinha conseguido perceber que uma conjetura carece de validação, continuando a admitir que qualquer conjetura é sempre verdadeira.

Passando à fase seguinte, Matilde socorreu-se dos apontamentos que tinha feito, antes da tarefa ser distribuída, quando a investigadora tinha revisto o método de completar o quadrado. A investigadora não interveio, deixando-a consultar os exemplos que tinham trabalhado e tentando verificar se a aluna conseguia escrever, de modo correto, a função $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x-h)^2 + k$. Conseguiu fazê-lo, embora tentasse em todas as etapas, fazê-lo por analogia com os exemplos. Esta ação parece sugerir que os exemplos são fundamentais para a aluna organizar o seu raciocínio.

Quando tenta passar à fase para demonstrar que o vértice do gráfico de uma função quadrática na forma $a(x-h)^2 + k, a \neq 0$ tem coordenadas (h, k), Matilde não consegue avançar e acaba por chamar e pedir orientação. A investigadora sugere que comece por considerar o gráfico da função quadrática x^2 e a partir dele, use as transformações do gráfico, tendo sempre presente o que pretende demonstrar. A aluna utiliza como estratégia inicial, a observação de exemplos na calculadora gráfica, que ela própria define. Consegue identificar o padrão que está subjacente às suas transformações, quando comparado com o gráfico da função quadrática x^2. O facto de recorrer a exemplos, pode mostrar que estes a ajudam a organizar ideias e a compreender as várias transformações. Consegue, nesta última tarefa, passar do caso particular para o caso genérico, usando h e k, quaisquer. Justifica corretamente as transformações que o gráfico inicial sofre, conseguindo realizar a demonstração, quase sem utilizar palavras e recorrendo essencialmente à representação gráfica. Começa por fazer um esboço, no mesmo referencial cartesiano dos gráficos das funções x^2 e de uma função do tipo $(x-h)^2$, justificado que o gráfico da desta última, se obtém do gráfico da função x^2 pela translação associada ao vetor $(h,0)$. Seguidamente esboça alguns gráficos de funções do tipo $a(x-h)^2$ justificando que este parâmetro apenas provoca contração ou dilatação ‘vertical’, seguida de reflexão de eixo Ox quando $a < 0$. Num outro referencial faz um esboço dos gráficos das funções do tipo $a(x-h)^2$ e $a(x-h)^2+k$ indicando que neste caso o gráfico da função do tipo $a(x-h)^2$ sofre uma translação de vetor (0,k). Termina com esboço do gráfico de uma função do tipo $a(x-h)^2+k$, indicando as coordenadas do vértice da parábola. A sua demonstração pode ser analisada na Figura 4.18.

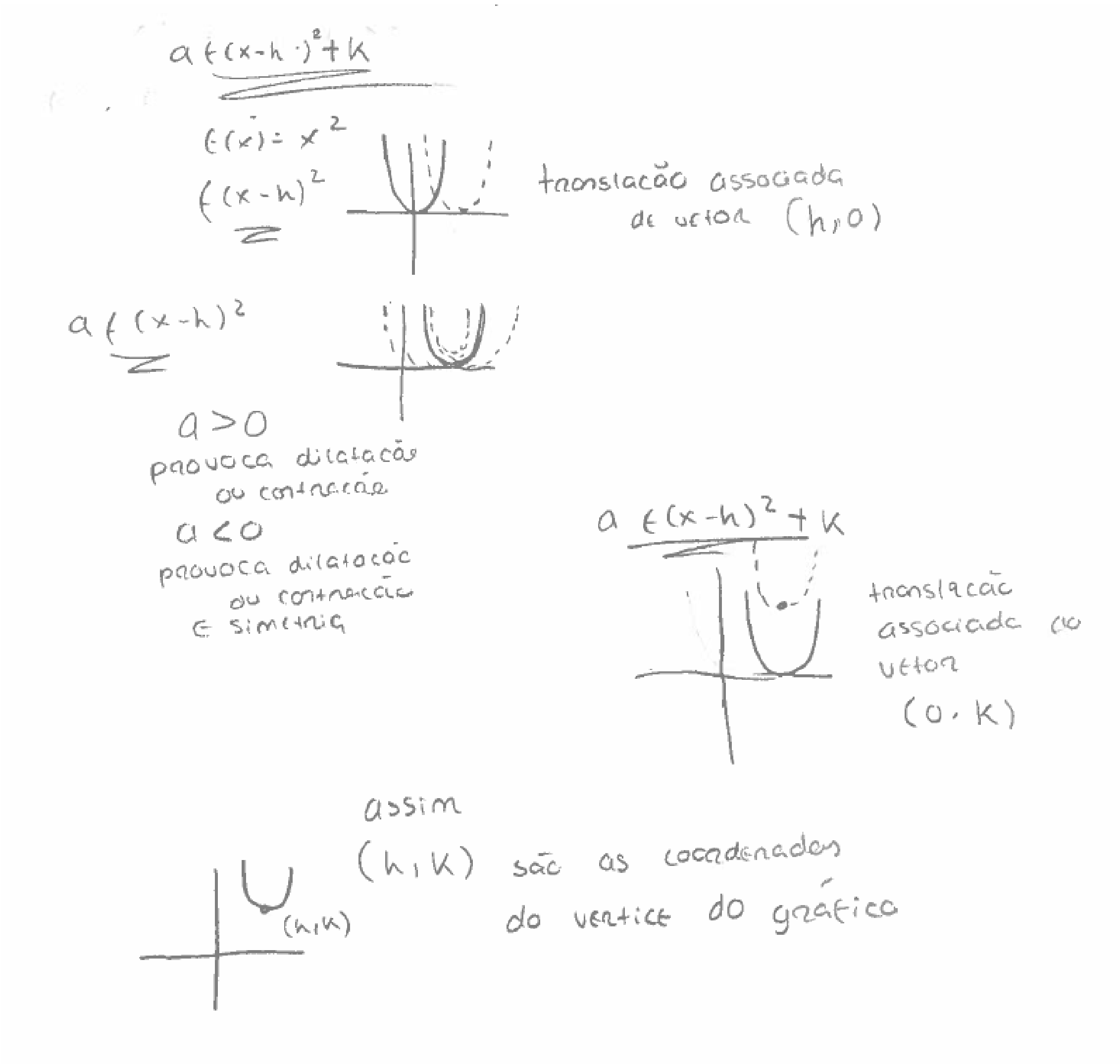


Figura 4.18 – Dedução realizada por Matilde na tarefa 3

Matilde entrega a sua tarefa concluída 15 minutos antes do tempo estipulado. Achou a tarefa interessante e considerou a criação da conjetura e a demonstração o mais difícil de realizar. Considera a fase de exploração importante, permitindo descobertas que não imaginava possíveis.

I: O que achaste da tarefa?

M: Foi uma tarefa bastante interessante sobre como descobrir as coordenadas do vértice de uma parábola. Nunca tinha pensado que as podíamos descobrir. E também nunca tínhamos trabalhado com estas funções neste sentido.

I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?

M: O mais difícil foi no início, perceber o raciocínio de como fazer os cálculos e qual a relação entre as coordenadas e também o final, na parte da demonstração. O mais fácil foi trabalhar na calculadora.

I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?

M: Sim, nesta tarefa a calculadora foi útil para criar a conjetura, que afinal estava errada, e para fazer a demonstração. Se não fosse a calculadora nunca chegava lá. Foi mesmo importante, porque dava mesmo para ver o que acontecia nos exemplos. E depois pensei que o h e o k são números e foi só fazer gráficos que em vez de números tinham letras.

As respostas da aluna sugerem que, a visualização dos exemplos na calculadora, foram fulcrais para a realização da demonstração. Parece ter ajudado na passagem do concreto para o geral, permitindo organizar as etapas e o raciocínio dedutivo efetuado. Nesta última tarefa nota-se, também, uma evolução relativa ao conceito que tem de demonstração que aluna evidenciava inicialmente.

4.3.5. Comentário Final

Matilde revela durante quase toda a investigação não saber o que é uma demonstração. No seu entendimento parece não existir diferença entre fazer demonstração e resolver exemplos/exercícios. Os exemplos surgem assim como suficientes para garantir a veracidade de uma conjetura. A aluna também manifesta desconhecimento em relação à necessidade de validação de qualquer conjetura, revelando sempre confusão até ao final da investigação. Há exceção da segunda tarefa, as conjeturas são formuladas com base na observação dos exemplos que observa na calculadora. Embora, atribua importância à demonstração na aquisição de conhecimentos, a aluna associa este conhecimento à explicação e compreensão da resolução de um exercício/exemplo.

A aluna conseguiu estruturar apenas a última das três demonstrações, embora necessitasse de uma primeira orientação da professora. No entanto, justificou as transformações que cada parâmetro provoca no gráfico da função quadrática x^2. Nas duas primeiras tarefas, não consegue fazer nenhuma das demonstrações pedidas. Embora as inicie de uma forma possível, rapidamente a abandona e recorre à experimentação de alguns exemplos para validar as suas conjeturas. A prestação da aluna ao longo das três tarefas, parece indicar uma evolução no sentido positivo do seu desempenho, visto na última já conseguir produzir a demonstração. Esta indagação, vai de encontro à resposta da aluna, que afirma ter sentido menos dificuldades na última tarefa.

I: Qual a tarefa de que mais gostaste? Porquê?

M: A que gostei mais e achei mais interessante, foi a última, porque gosto do facto de termos de fazer contas e desenvolvê-las. Além disso era mais fácil de ver as coisas. Conseguia ver na calculadora e imaginar na minha cabeça. Foi muito diferente da primeira, que achei muito difícil, pois não estava habituada a ter de fazer conjeturas nem a usar a calculadora gráfica. Mas, na última as coisas já eram mais claras.

A calculadora é sempre apontada como importante na resolução das tarefas. O facto de a aluna não saber o que é uma demonstração, pode levar a pensar que a calculadora pode ter influenciado de modo negativo na validação das conjeturas. No caso concreto de Matilde, o facto de a calculadora permitir uma melhor e maior quantidade de exemplos, poderá ter ajudado a aluna a convencer-se que a conjetura se verificava sempre, sem sentir necessidade na sua demonstração. No entanto, a última tarefa sugere que a sua utilização pode promover e facilitar a construção da demonstração. A expressão "Conseguia ver na calculadora e imaginar na minha cabeça", parece também indicar que a calculadora pode auxiliar a abstração.

4.4. João

João é um dos alunos que integra a turma e a investigação. No início do ano letivo tinha 15 anos. Encontra-se a frequentar o curso de ciências e tecnologias, mas afirma que gostava de estar em artes visuais. Nunca repetiu nenhum ano e terminou o 9.º ano com nível 4 à disciplina de Matemática. No exame de final de ciclo não conseguiu manter o nível, tendo obtido nível 3. Na disciplina de Matemática A, até ao final do 2.º período, apenas conseguiu ter uma nota positiva, num dos testes realizados. Terminou o 1.º período com classificação de 8 valores e no 2.º período obteve 9 valores. Ao longo do ano letivo, tem revelado muitas dificuldades em acompanhar a matéria. Não se inibe de colocar qualquer dúvida perante a turma. Tem pouco sentido crítico, trabalha pouco em aula, mas gosta de se voluntariar para ir ao quadro resolver os exercícios, mesmo quando os conteúdos lecionados são novos. É muito distraído, desorganizado e na maioria das vezes, não regista o conteúdo das aulas no caderno. Afirma que a Matemática é importante para tudo e ajuda a desenvolver o raciocínio lógico. O conteúdo que o João mais gosta é geometria, porque é o que lhe "parece mais lógico no dia-a-dia". A lógica é o conteúdo que gosta menos, porque tem uma linguagem muito formal. Revela que os conteúdos que considera mais difíceis, são os que menos gosta e os mais simples são os que mais gosta.

4.4.1. Demonstração – noção e importância

João encontrava-se ansioso por fazer a entrevista. Quando tenta definir demonstração mostra alguma hesitação acabando por definir o que é para si uma demonstração Matemática. Para o aluno, a demonstração é um processo que parte de uma hipótese e segue um raciocínio lógico correto até obter o resultado pretendido (verdadeiro).

I: O que é, para ti, uma demonstração Matemática?

J: Uma demonstração, eu acho que é, vá… há várias teorias sobre o que é que pode ser alguma coisa dentro da Matemática e quando eu demonstro a alguém, é quando eu convenço o meu auditório, ou quem me está a ouvir, através de um raciocínio lógico e correto, e consigo demonstrar e fazer com que outros concordem com a teoria e esta seja dada como verdade.

I: Para que achas que serve a demonstração?

J: Serve para convencer, mas também serve para perceber melhor o porquê de alguma coisa ser assim e não de outra forma.

I: Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?

J: Sim, porque se nos apresentarem as coisas já feitas provavelmente eu vou esquecer. Mas se me demonstrarem e explicarem o porquê de aquilo acontecer, aí já vai ficar na cabeça. E nós precisamos de sair da zona de conforto. Eu também reclamo muito com isso, mas é uma verdade.

A demonstração assume um papel importante no âmbito da explicação, compreensão, aquisição de conhecimento e convencimento. A sua resposta sugere que a demonstração potencia a explicação, para provar a veracidade de uma afirmação, sendo mais simples reconhecer e relembrar um dado resultado.

I: Costumas fazer demonstrações na aula de Matemática?
J: Este ano fazemos algumas.
I: A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
J: Acho que foi no 8.º ano, mas no 8.º ano eu não estava muito atento. Acho que me lembro mesmo foi no 9.º. Foi a demonstração para a fórmula resolvente. Na altura, a gente achava aquilo um bicho de sete cabeças, mas hoje faz sentido.
I: Como e por quem eram feitas?
J: Era a professora, no quadro.
I: Como te sentias na altura?
J: Desconfortável, principalmente porque não era com números concretos. Até ali era sempre repetir e eram números diferentes. E a gente aplicava a mesma coisa. Mas pensar, começar no início e ir para um fim em que a gente não sabe onde é que vai chegar e com letras abstratas que nós apenas sabemos que pertencem a um conjunto, é difícil. Principalmente com 12 anos ou 13.
I: E atualmente, como te sentes?
J: Principalmente agora no 10.º dei um grande salto, porque no 9.º ano mesmo assim continuava um bocado impensável conseguir seguir um raciocínio. Mas, este ano, a Física/Química ajudou bastante, também. Porque, nós somos obrigados a partir de fórmula e consoante o que nos dão deduzirmos e chegarmos a outra fórmula. E mesmo na Matemática, algumas explicações e demonstrações que a professora vai dando já vai fazendo mais sentido.

João lembra-se de fazer demonstrações desde o 8.º ano, mas admite que a sua postura em aula não era a melhor para as perceber. Admite que na altura se sentia desconfortável, que exigia um tipo de abstração que não estava habituado. Atualmente, sente-se menos desconfortável quando se depara com uma demonstração, conseguindo até perceber algum sentido nas mesmas.

I: Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas?
J: Boa pergunta. Eu acho que é em número certo. Grande parte das coisas que eu sei é por causa das demonstrações. Porque aprendo muito mais, tal como já tinha dito, quando me explicam o porquê. Eu acho que está na medida certa, mas também não vejo como é que iríamos fazer mais com pouco tempo. Às vezes é mais fácil dar a fórmula, pedir que as pessoas a saibam e continuar a andar. Sem tempo é complicado.
I: E quem achas que as deveria fazer? Porquê?
J: Como as coisas estão, em que nós ainda vimos do 9.º ano muito crianças, no 10.º é difícil que não seja o professor a fazê-las. Claro que o professor podia levar o aluno ao quadro e tentar estar a pensar com ele. Mas, lá está, era um aluno. E tinha de ser com o professor. Mas se calhar algumas conseguiríamos deduzir. Depende é do grau de dificuldade. É engraçado, porque agora já não é tão abstrato usar letras como era no início.

A análise da última resposta leva a crer que o aluno ainda se considera muito imaturo e dependente, assumindo que só conseguirá fazer uma demonstração se acompanhado pelo professor. Admite, no entanto, que o seu nível de abstração melhorou. Deste ponto de vista, defende que as demonstrações realizadas em aula são em número adequado devendo ser o professor a fazê-las. A falta de tempo também é apontada como fator limitador do número de demonstrações a fazer em aula.

4.4.2. Tarefa 1

João apresentou grandes dificuldades em perceber a tarefa, na qual se pretendia que os alunos encontrassem uma relação geométrica entre o gráfico de uma função bijetiva e o da respetiva função inversa. Resolveu as primeiras questões com o auxílio da calculadora apresentando alguma dificuldade, no seu manuseamento. Na primeira questão desta tarefa, indicou abcissa do ponto de interseção da função real de variável real definida por $f(x) = 2 + x^3$ com o eixo Ox os pontos de intersecção com com um arredondamento às centésimas, não o tendo determinado analiticamente.

O aluno não conseguiu encontrar nenhuma relação entre o gráfico da função r.v.r. definida por $2 + x^3$ e o da respetiva inversa. Mesmo depois de alertado para alterar o *zoom* e de o fazer, mostrou dificuldades, não conseguindo visualizar a relação existente entre os dois gráficos. Foi incentivado a avançar para que fosse possível observar a representação gráfica de outras funções e das respetivas funções inversas. Avançou como sugerido, mas as dificuldades mantiveram-se. Somente no último exemplo conseguiu perceber que existia uma relação de simetria entre o gráfico da função r.v.r. definida por $2x^2 + 1, x \geq 0$ e o da respetiva função inversa. Depois de indicar à investigadora a relação que lhe parecia existir, foi aconselhado a observar novamente os exemplos anteriores, para ver se a relação encontrada também se verificava. Após algum tempo de observação, alternando várias vezes a visualização entre os exemplos considerados, João escreveu a sua conjetura (ver Figura 4.19). Esta atitude pode sugerir que a exploração através da calculadora, se mostra importante no reconhecimento da relação geométrica existente entre os gráficos das duas funções (inversas uma da outra) e consequentemente na formulação da conjetura.

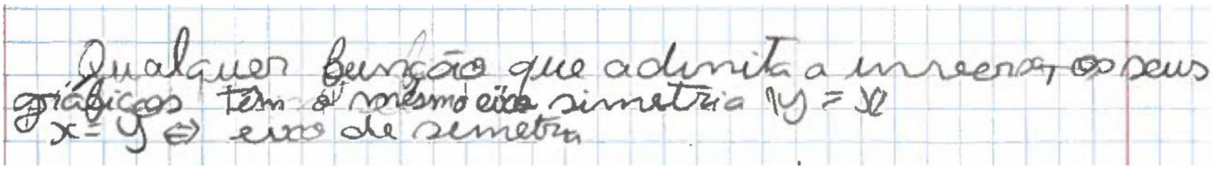


Figura 4.19 – Registo da conjetura elaborada por João na tarefa 1

No entanto, o aluno não consegue ir além da conjetura, dá por terminada a exploração da tarefa, que fica incompleta: "Não consegui organizar as ideias para chegar lá…". A investigadora ainda tenta que recue na sua decisão, mas João afirma não ter conhecimentos para avançar mais. Indica que pensa saber o que tem de demonstrar, mas não se lembra como é possível fazê-lo. Não querendo retomar a resolução da tarefa entrega-a inacabada.

I: O que achaste da tarefa?
J: Achei estranha. Nunca me tinham pedido para fazer nada disto, por isso acho que é normal. Mas, acho que é isto que falta. A gente precisa de tentar demonstrar mais vezes, mesmo que não se consiga. De ser obrigados a pensar. O pior é haver tempo.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
J: Acho que nada foi fácil. Também ainda não sei trabalhar bem com a calculadora e por isso, também tive um bocado de dificuldade nessa parte e demorei muito tempo por causa disso. Além disso, achei difícil, porque acho que eu ainda estou um bocado longe desta matéria.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura?
J: Sem usar a calculadora era impossível! Nunca ia conseguir fazer uma conjetura. Acho que esta foi a primeira vez que fiz uma conjetura.

Na entrevista realizada no final da tarefa, o João indica que se sentiu inseguro e que também não se conseguiu adaptar ao tipo de tarefa, considerando-a difícil. Considera, contudo, que este tipo de tarefa é importante, pois obriga os alunos a desenvolver o seu raciocínio. Sugere ainda que a calculadora desempenhou um papel importante na criação da conjetura, sem a qual não conseguiria formulá-la.

I: Não conseguiste fazer a demonstração, mas a dada altura disseste que sabias o que tinhas de demonstrar, mas não quiseste dizer o que era. Podes dizer agora?
J: Eu acho que tinha de provar que a reta $y = x$ era a mediatriz dum segmento de reta, mas não sei qual.
I: O teu raciocínio estava certo. Porque não tentaste avançar?
J: É a minha insegurança também a falar, e também já não me lembrava muito bem da expressão da mediatriz. Também não sabia que pontos é que devia usar para os extremos do segmento de reta.

João não conseguiu iniciar a demonstração, nem definiu nenhuma estratégia para a iniciar. No entanto, a sua resposta sugere que a sua intuição estava correta e caso apresentasse maior confiança, talvez fosse possível chegar à demonstração.

4.4.3. Tarefa 2

Nesta tarefa pretendia-se, numa fase inicial, que os alunos explorassem a relação de ordem existente entre os declives de duas quaisquer retas PQ e QP, e a concavidade do gráfico de uma função quadrática, onde que P, Q e R são pontos que pertencem ao gráfico da função, com $x_P < x_Q < x_R$. Numa segunda fase, pretendia-se que os alunos conjeturassem sobre o sentido de concavidade do gráfico da função quadrática $ax^2, a \neq 0$ e a demonstrassem.

João efetuou as questões de resposta imediata, formulou a conjetura e demonstrou-a, realizando toda a tarefa. Contudo, demonstrou alguma dificuldade no manuseamento da calculadora uma vez que não estava familiarizado com as ações necessárias à realização desta tarefa. Tal situação, fez com que utilizasse muito tempo na execução das duas primeiras questões, necessitando por diversas vezes de solicitar apoio da investigadora. Este apoio centrou-se essencialmente na indicação dos menus que o aluno precisava conhecer para prosseguir na sua exploração. No momento de formular a conjetura, cujo registo se encontra na Figura 4.20, não revela necessitar de observar o trabalho realizado anteriormente. Escreve a conjetura rapidamente, cometendo um erro na sua escrita. Este erro parece ter ocorrido por falta de atenção e não falta de conhecimento dado à forma como o aluno desenvolve a sua demonstração. O mesmo é confirmado por ele no final da realização da tarefa.

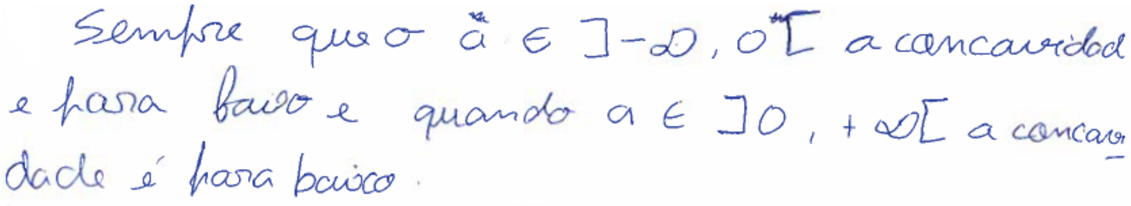

Sempre que o $a \in]-\infty, 0[$ a concavidad
e para baixo e quando $a \in]0, +\infty[$ a concavi
dade é para baixo.

Figura 4.20 – Conjetura elaborada por João na tarefa 2

Enquanto tenta delinear a sua demonstração, observa as construções feitas na calculadora e volta a observar o que fez em toda a tarefa. Expressou em voz alta “desta vez não quero desistir. Temos de calcular os declives das retas, não é?”. Nesta afirmação, parece que o aluno vê a demonstração como um desafio, e apresenta maior vontade, que na tarefa anterior, para o ultrapassar. A investigadora incita-o a avançar e o aluno rapidamente inicia a sua demonstração, tentando determinar os declives das retas PQ e QP. Começou por considerar abcissas, p, q e r ($p < q < r$) dos pontos P, Q e R, determinando as respetivas imagens. Em seguida escreveu o modo como iria determinar o declive, $m_{PQ} = \frac{q-p}{f(q)-f(p)}$, mas mão se sentindo muito confiante chamou para confirmar se estava a seguir o caminho certo. A investigadora apenas o questionou sobre o que pensava. Não deu resposta e com recurso à calculadora, representou a reta de equação $y = 2x$. Determinou os pontos de interseção com os eixos coordenado e numa folha à parte, utilizou a expressão que tinha considerado, verificou que não estava correto. Voltou a fazer o cálculo, mas de forma correta. Embora apoiado num exemplo o aluno conseguiu ultrapassar a sua dúvida, de modo a poder avançar na sua demonstração de forma correta. Determinou os declives das retas PQ e QP e na parte final, acabou por se apoiar na linguagem natural para justificar que $m_{PQ} < m_{QR}$ quando $a > 0$ e que $m_{PQ} > m_{QR}$ quando $a < 0$, considerando que q é constante e que $p < r$. A sua demonstração, que se encontra na Figura 4.21, sugere que o aluno manteve um raciocínio organizado e coerente durante o processo de realização da mesma.

Sejam P, Q, R pontos de f tal que

$p < q < R$

$$f(p) = ap^2$$

$$m_{PQ} = \frac{f(Q) - f(P)}{Q - P} = \frac{aq^2 - ap^2}{q - p} \Leftarrow f(q) = aq^2$$

$$f(R) = aR^2$$

$$= \frac{a(q^2 - p^2)}{q - p} = \frac{a(q - p)(q + p)}{q - p} =$$

$$= a(q + p)$$

$$m_{QR} = \frac{f(R) - f(Q)}{R - Q} = \frac{aR^2 - aq^2}{R - Q} =$$

$$= a\,\frac{(R - q)(R + q)}{R - q} =$$

$$= a(R + q)$$

$m_{PQ} = a(q + p)$ sendo a constante e $R > p$

$m_{QR} = a(R + q)$ então $m_{PQ} < m_{QR}$ se

$p < q < R$ $\quad a > 0$ caso $a < 0$ então

$m_{PQ} > m_{QR}$

Então o gráfico de ax^2 tem concavidade para cima quando $a > 0$ e para baixo quando $a < 0$.

Figura 4.21 – Dedução realizada por João na tarefa 2

Assim que terminou a demonstração entregou, de imediato, a resolução da tarefa. Mostrou-se confiante e desejoso de manifestar a sua opinião. Mostrou-se mais adaptado ao tipo de tarefa, embora sugira que sentiu algumas dificuldades ao fazer a demonstração.

I: O que achaste da tarefa?

J: Esta foi melhor, pelo menos o choque não foi tão grande.

I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?

J: O que foi mais difícil foi a demonstração. Eu tenho um problema, quando eu não consigo ver o final de um exercício já começo a *stressar*. Então, numa demonstração pior. Começar por algo que eu não sei se vai dar bem e que não sei depois com o que hei de relacionar é estranho.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura?
J: Nesta conjetura já sabia o que escrever, professora. Não precisei da calculadora. Isto a gente decorava no 9.º ano e depois no teste setentas, oitentas, noventas… era bom!
I: Mas não a escreveste corretamente.
J: Sério? Deixe ver. Isto foi falta de atenção.
I: E no processo de demonstração?
J: Na demonstração também tínhamos de utilizar coisas que já demos no 8.º e no 9.º ano e estamos sempre a usar em Física e Química, por isso, foi mais fácil pensar. Mesmo assim ajudou para perceber se estava a calcular bem o declive.

Nesta tarefa afirma que a calculadora não ajudou na criação da conjetura, nem na demonstração. No entanto, pela sua resposta, perece que tal se deve ao facto de já ter algum conhecimento relativamente ao conteúdo em causa. É de notar que nesta segunda tarefa, João revelou uma notável evolução, conseguindo resolver toda a tarefa

4.4.4. Tarefa 3

Na terceira tarefa, pretendia-se que fosse demonstrado que numa função quadrática na forma $a(x-h)^2+k\ (a \neq 0)$, o ponto (h,k) é vértice da parábola que a representa. Note-se ainda que os exemplos explorados inicialmente conduziam à formulação de uma conjetura, para a ordenada do vértice que seria refutada numa alínea posterior.

João consegue ter uma prestação razoável no que diz respeito à demonstração. Embora não consiga elaborar a demonstração de forma totalmente correta, porque não consegue demonstrar que pode escrever uma qualquer função quadrática na forma $a(x-h)^2+k\ (a \neq 0)$, consegue delinear uma estratégia para fazer a restante demonstração. Segue um processo adequado, cometendo alguns erros de escrita, levando-o a justificações incorretas. Revela também alguma confusão no modo como apresenta a sua demonstração.

João não apresentou dificuldades na realização dos primeiros exercícios da tarefa, em que tinha de determinar as coordenadas do vértice de várias parábolas e chegou facilmente à conjetura que se esperava que fizesse e que se pode ver na Figura 4.22. Embora não o tenha escrito, pode depreender-se, pela forma como a apresenta que considera $V(x,y)$ o vértice da parábola, com $x=-\frac{b}{2a}$ e $y=b+c$. A observação feita durante a realização da tarefa aponta para que o aluno após a recolha de informação das coordenadas dos vértices, se concentrou na análise dessas coordenadas. O aluno testou as suas conjeturas com base na experimentação concluindo que são válidas e regista-as de imediato.

$$b + c = y$$

$$-\frac{1}{2a} \times b = x$$

Figura 4.22 – Conjetura elaborada por João na tarefa 3

Contrariamente à facilidade evidenciada na primeira parte da tarefa, o aluno apresentou muitas dificuldades para escrever a expressão analítica da função $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x-h)^2 + k$, sem que o conseguisse fazer com sucesso. Mesmo com algumas sugestões da investigadora e observando um exemplo, o aluno não conseguiu, acabando por desistir. No entanto, perguntou se podia tentar fazer parte da demonstração pedida, assumindo que o resultado que não tinha conseguido mostrar era válido. Esta questão, levou a investigadora a supor que o aluno poderia já ter pensado na forma de realizar a segunda parte da demonstração, pelo que concordou. João avançou então com a sua estratégia. Trabalhou muito na calculadora e tentou fazer um paralelismo entre o que observava na calculadora com o que escrevia na sua demonstração. Utilizou várias representações gráficas na sua demonstração, tal como se pode ver na Figura 4.23. Opta por fazer o esboço de cinco gráficos cartesianos. Em primeiro lugar começa por fazer um esboço da função x^2 seguindo-se o esboço de uma função do tipo $a(x-h)^2$. Neste caso, a expressão algébrica que escreve não corresponde ao esboço do gráfico apresentado e a justificação dada também não. Os esboços do terceiro e quarto gráfico cartesiano sugerem que o aluno apenas queria identificar as transformações gráficas provocadas pelo parâmetro a. Termina com o esboço do gráfico de uma função do tipo $a(x-h)^2 + k$. Em algumas situações a sua escrita não corresponde ao esboço dos gráficos. Contudo, a sua demonstração sugere que o aluno percebe que os coeficientes h e k provocam translações no gráfico de x^2, percebendo também que a transformação provocada pelo coeficiente a não influencia a determinação das coordenadas do vértice da parábola.

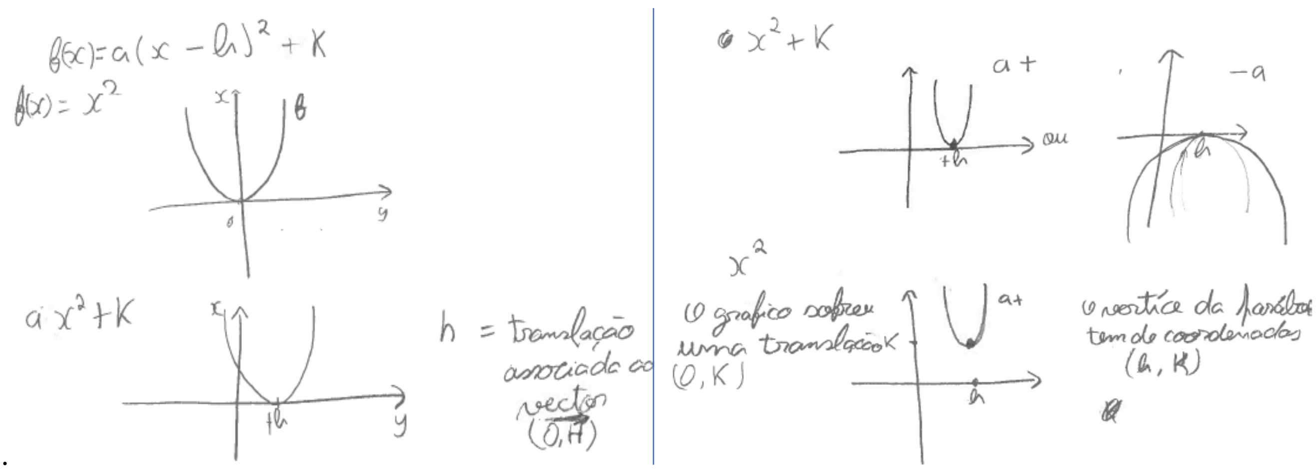


Figura 4.23 – Dedução realizada por João na tarefa 3

Após a realização da tarefa o aluno entrega-a e expressa a sua opinião sobre a mesma.

I: O que achaste da tarefa?

J: Ó professora, isto é, como um comboio, depois de passar a primeira carruagem vêm todas. Agora é que eu estava a entrar nisto. Agora a sério, achei diferente e pertinente. É pena que nunca consiga fazer tudo.

I: O que para ti o que foi mais fácil? E o que foi mais difícil?

J: O mais difícil foi completar o quadrado, que não fui capaz. O mais fácil foi mesmo trabalhar na calculadora. Achar a conjetura, também não foi difícil.

I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?

J: Nesta ajudou para ver como é que ficava, como é que não ficava. Experimentar com valores concretos e perceber. Foi fundamental para a demonstração. Se calhar poderíamos chegar lá sem calculadora, não digo que não, mas com a calculadora conseguimos ter uma melhor perceção. É mais fácil perceber o que está a acontecer e consigo ver, como é que ao variar alguns resultados o que é que acontece. Depois é só extrapolar para um *h* qualquer e para um *k* qualquer. Na conjetura também ajudou, para conseguir relacionar mais facilmente os valores. Além disso, como não sei encontrar as coordenadas do vértice de uma parábola, se não fosse a calculadora, não a conseguia fazer.

João considerou a tarefa pertinente. Segundo ele, a calculadora facilita a compreensão das transformações que os parâmetros provocam nos gráficos. Sugerindo que, dessa forma, ajudam a compreender como deve ser estruturada a demonstração. Neste caso, parece clara a associação do uso da calculadora à importância do papel da linguagem gráfica. Também, parece ter tido um papel importante na motivação do aluno suscitando um maior interesse pela realização da tarefa.

4.4.5. Comentário Final

Para João uma demonstração parte de uma hipótese e segue um raciocínio lógico correto para mostrar que o resultado é verdadeiro. Considera que ela é útil para compreender os conteúdos, atribuindo-lhe, também, as funções de convencimento e explicação. Durante toda a investigação foi coerente nunca tentando socorrer-se de exemplos para validar uma conjetura, mesmo quando não foi capaz de a realizar.

João revelou um percurso heterogéneo no que se refere ao seu desempenho nas três tarefas. Apenas conseguiu realizar por completo, a segunda tarefa. Na primeira não conseguiu fazer a demonstração e na última fez apenas uma parte do que era pedido na demonstração, evidenciando, contudo, alguma dificuldade revelando falhas no que se refere a justificações.

A última tarefa foi a que mais gostou. Afirma que a última tarefa lhe fez sentir a necessidade de realizar a demonstração e que nem sempre as conjeturas feitas são verdadeiras. Nesta última entrevista, João faz referência à realização pessoal resultantes da construção de uma demonstração, uma das funções que Villiers (2001) também atribui à demonstração.

I: Qual a tarefa de que mais gostaste? Porquê?

J: A tarefa que mais gostei foi a última, também foi a que achei mais trabalhosa. Não sei muito bem porquê, até era mais curta. Só que tive de fazer muitas experiências na calculadora. Andar cá e lá para conseguir alinhar as ideias. Se calhar também foi por isso que achei mais interessante. Foi engraçado ver que às vezes uma coisa que parece verdade afinal não é. E depois conseguir mostrar que o que acontece é verdade em qualquer caso é compensador.

I: Então, na última tarefa conseguiu perceber a necessidade de demonstração.

J: Sim, aqui foi mesmo claro. Percebi que se alguém me quisesse enganar podia mostrar-me um monte de exemplos e eu, se não pensasse nisso agora, ia acreditar que era verdade. Vou ficar mais alerta. Só se mostrarmos com letras é que vemos o que realmente é verdade para todos os casos.

Relativamente ao uso da calculadora revelou ser importante principalmente na demonstração da última tarefa. Na criação das conjeturas refere também ter sido útil a utilização da calculadora. A análise sugere que na primeira tarefa a criação da conjetura decorreu da observação direta dos gráficos produzidos, podendo ser influenciada pela forma como esta foi realizada. Já na última tarefa a calculadora não pareceu influenciar a formulação da conjetura, mostrando-se útil apenas na determinação das coordenadas do vértice.

4.5. Teresa

Teresa tinha 15 anos quando ingressou no 10.º ano. É uma aluna um pouco distraída, faladora e que apresenta alguma dificuldade em recuperar a matéria que não acompanha. No entanto, quando está concentrada é participativa revelando bom raciocínio lógico. Estranhamente o seu desempenho nos testes não se coaduna com as capacidades que revela em sala de aula. Tem pouca confiança nas suas capacidades e apresenta relutância na realização de tarefas que, à partida, considera mais difíceis. Muitas vezes não realiza os trabalhos de casa, o que também dificulta o acompanhamento dos conteúdos lecionados. Faz registo dos conteúdos lecionados no caderno. Terminou o 3.º ciclo com nível 3, tendo mantido esse nível no exame final. Este ano letivo apresenta uma clara disparidade entre as notas obtidas nos testes (baixas) e as obtidas nas fichas (altas), tendo conseguido até ao momento apenas uma positiva no último teste. Contudo, melhorou significativamente o seu desempenho no 2.º período, tendo passado de uma classificação de 7 valores no 1.º período para uma classificação de 9 valores.

Teresa afirma ter uma relação de amor-ódio com a Matemática. Diz que a Matemática é uma coisa estranha, porque tudo bate certo, tudo se interliga e faz sentido. O que mais gosta são equações e o que menos gosta é estatística e geometria. Teresa é a única aluna, cujo conteúdo que considera mais simples não coincide com o que mais gosta e o mais difícil também não coincide com o que menos gosta. Considera a lógica o conteúdo mais simples, por ser o que para si faz mais sentido e as funções o mais difícil, por ser muito subjetivo.

4.5.1. Demonstração – noção e importância

Teresa expressa por palavra suas o que entende por demonstração. Embora não o consiga fazer de uma forma linear, usa para a definir palavras como “provar”, comprovar”, “validar”. Segundo ela, demonstração é a explicação do porquê das coisas e provar que algo é sempre válido, por exemplo um teorema. Para a aluna parece não existir diferença entre definição e função de demonstração. Na verdade, nas questões seguintes atribui à demonstração a função de explicação, validação e compreensão.

I: O que é, para ti, uma demonstração Matemática?
T: É explicar o porquê de qualquer coisa acontecer. É explicar o porquê das coisas e a partir disso provar e comprovar que isso é assim e é sempre válido. É validar. Por exemplo, um teorema tem de ser demonstrado para se saber que é sempre válido.
I: Para que achas que serve a demonstração?
T: Para validar. E também ajuda a perceber as coisas.
I: Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?
T: Sim, foi o que eu disse. Acho que ajudam a perceber melhor as coisas.

A primeira demonstração de que Teresa se lembra foi feita no 8º ano, pela professora da altura. A explicação que dá relativamente ao que foi feito, parece indicar que ainda se lembra da forma como foi estruturada. Parece revelar também, por parte da aluna, interesse e curiosidade na disciplina.

I: Costumas fazer demonstrações na aula de Matemática?
T: Sim, fazemos algumas, mas não muitas. A professora às vezes faz.
I: A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
T: A primeira que me lembro foi do teorema de Pitágoras no 9.º, não no 8.º ano. Não me lembro de fazer nenhuma antes.
I: Como e por quem eram feitas?
T: Era a professora, no quadro. A professora desenhava e pôs uma equação no quadro, depois fazia tudo para trás e chegava à outra que queria.

Das respostas dadas pela aluna, a demonstração parece estar sempre associada à compreensão e aquisição de conhecimento, assumindo um papel importante em termos escolares. Teresa, parece curiosa, querer perceber mais do que usualmente lhe é transmitido, não se contentando com o "é assim porque sim" espelhado na expressão "não era só despejar fórmulas". Assim, parece natural que sinta necessidade de que sejam feitas mais demonstrações em contexto de sala de aula.

I: Como te sentias na altura?
T: Bem. Acho que ajudou a clarificar muito mais as coisas. A perceber porque é que aparecia a fórmula. Acho que foi importante ver que aquilo não apareceu do nada.
I: E atualmente, como te sentes?
T: Bem, também, algumas vezes parece que fico um bocado bloqueada, mas depois ajuda a perceber e é muito melhor.
I: Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas?
T: Ah, muitas mais. Pelo menos assim percebia o porquê e não era só despejar fórmulas.
I: E quem achas que as deveria fazer? Porquê?
T: Acho deve ser o professor. Porque nós estamos habituados ao professor, à sua forma de explicar.
I: E se fossem os alunos a fazê-las?
T: A stora, fez isso cá na aula. Até pôs o "X" a fazer uma demonstração no quadro. E ele fez, mas para isso é preciso ser bué inteligente. Mas acho que era bom. Se calhar evoluíamos mais se fossemos nós a tentar descobrir as coisas do que ser alguém a dizer: olha é assim porque isto acontece, blá, blá, blá… Se nós fizéssemos mais, talvez conseguíssemos perceber melhor a matéria, porque já sabíamos o que acontecia e o porquê, e víamos outras aplicações nas coisas.

Contudo, considera que deve ser o professor a realizar as demonstrações e a fazer a explicação das mesmas. Quando confrontada com a possibilidade de serem os próprios alunos a fazê-las, primeiro parece expressar falta de confiança nela própria. Mas depois, volta a focar-se na compreensão dos conteúdos, voltando a considerar que a demonstração ajuda nesse processo. Nesta sua resposta é possível verificar que a aluna também atribui à demonstração a função de descoberta.

4.5.2. Tarefa 1

A tarefa 1 visava a exploração de gráficos de funções r.v.r. bijetivas e das respetivas funções inversas de modo a que os alunos conseguissem descobrir a relação geométrica entre o gráfico existente entre os gráficos das duas funções (inversas uma da outra) e formulassem uma conjetura. Tinha ainda como objetivo a demonstração da conjetura formulada.

Teresa revelou alguma dificuldade para interpretar o que era pedido na tarefa e não percebia porque lhe era pedido para representar as funções na calculadora para responder às questões. Como dificuldade acrescida nunca tinha trabalhado com calculadora gráfica, o que originou dúvidas constantes relacionadas como o seu manuseamento. Embora devagar, e incentivada pela investigadora, foi avançando na resolução da tarefa. Dada a sua relutância e dificuldade em trabalhar com a calculadora gráfica optou por determinar analiticamente os pontos de interseção da função r.v.r. definida por $f(x) = 2 + x^3$ com os eixos coordenados.

A visualização dos gráficos da função r.v.r. definida por $f(x) = 2 + x^3$e da sua função inversa foi suficiente para que encontrasse a relação geométrica existente entre eles. Contudo, seguiu a tarefa, explorando o que acontecia quando considerava outras funções. No entanto, assim que descobriu o resultado manifestou a seguinte opinião "stora, isto com a calculadora é mesmo fácil de perceber". Esta opinião parece indicar que a calculadora ajudou à criação da conjetura a que a aluna chega de que a bissetriz dos quadrantes ímpares é o eixo de simetria entre os dois gráficos, deixando subentendido que se refere à simetria existente entre os gráficos de uma função e da respetiva função inversa. É possível ler a conjetura formulada por Teresa na Figura 4.24.

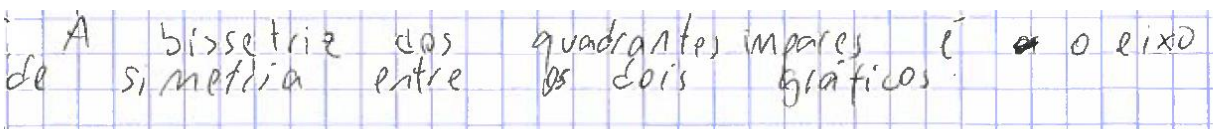

A bissetriz dos quadrantes impares é ~~o~~ o eixo de simetria entre os dois gráficos.

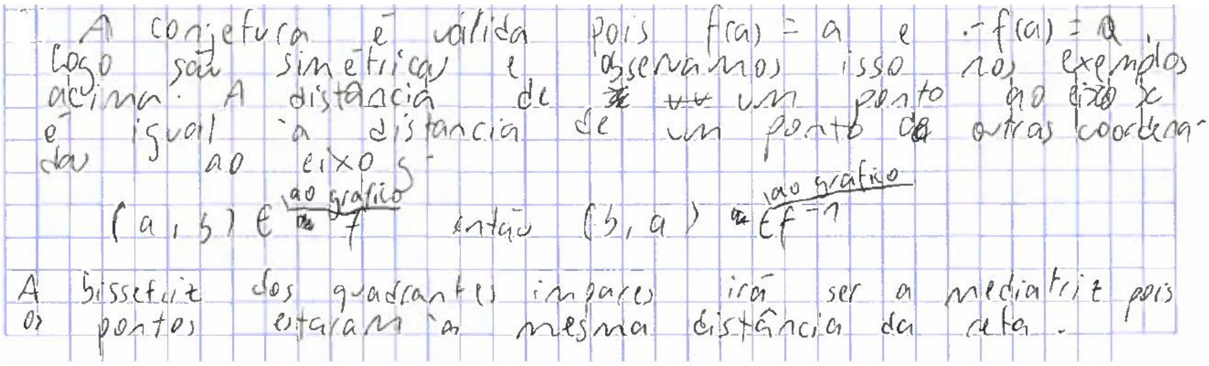
Figura 4.24 – Registo da conjetura elaborada por Teresa na tarefa 1

Porém, Teresa parece não perceber que qualquer conjetura necessita de ser demonstrada, pois admite que que a mesma é válida apenas com base nos exemplos observados.

Após a criação da conjetura, Teresa manteve-se em silêncio bastante tempo, fazendo crer que não sabia o que fazer ou como fazer a demonstração. Para desbloquear a situação, a investigadora optou por lhe perguntar o motivo pelo qual não avançava.

T: Acho que a demonstração passa por mostrar que os pontos das duas funções, estão à mesma distância do eixo de simetria, mas não sei como o fazer.

Esta afirmação, bem como documento que entrega sugerem que a aluna sabe o que quer demonstrar, embora não o consiga concretizar. Depois de incentivada a avançar, Teresa recorre algumas vezes à calculadora, para observar as representações gráficas das funções que tinha disponíveis, mas que parecem não ter ajudado no processo de demonstração. É de notar que o início da resolução teve uma estratégia que poderia permitir desenvolver a demonstração, como se pode verificar pela observação da Figura 4.25. Teresa considera dois pontos genéricos de coordenadas (a, b) e (b, a) pertencentes, respetivamente, aos gráficos de uma qualquer função f e ao da sua inversa f^{-1}. Verifica-se, contudo, que não consegue concluir a estratégia e não consegue realizar a demonstração. Acaba por afirmar que os pontos (a, b) e (b, a) estão à mesma distância da bissetriz dos quadrantes ímpares sem, contudo, o demonstrar.


A conjetura é válida pois f(a) = a e f⁻¹(a) = a. Logo são simétricas e observamos isso nos exemplos acima. A distância de um ponto ao eixo x é igual à distância de um ponto da outras coordenadas ao eixo y.

(a, b) ∈ ao gráfico f então (b, a) ∈ ao gráfico f⁻¹

A bissetriz dos quadrantes ímpares irá ser a mediatriz pois os pontos estaram à mesma distância da reta.

Figura 4.25 – Registo da dedução feita por Teresa na tarefa 1

Após a entrega da resolução da tarefa, a aluna, parece mostrar alguma ter dúvidas do que é uma demonstração. No entanto, uma análise mais rigorosa às suas respostas sugere que Teresa tem noção do que é uma demonstração, pois a própria identifica o que fez de errado quando tentou fazer a demonstração. Concluindo por si própria que não tinha conseguido demonstrar a conjetura formulada.

I: O que achaste da tarefa?
T: Achei interessante. Diferente do fazemos normalmente. Só por isso já foi fixe.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
T: O mais fácil foi ver os domínios e os contradomínios das funções. O que foi mais difícil foi trabalhar com a calculadora, porque foi a primeira vez que fiz gráficos na calculadora e por isso, não sabia como se fazia nada. Se a stora não ensinasse, não ia fazer nada. Mas mesmo assim, preciso de mais prática. Também foi a demonstração. Eu nem sei se o que fiz é mesmo uma demonstração. Agora com calma, acho que não é, porque eu afirmo que a bissetriz é a mediatriz, mas não mostro.

I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?

T: Sim, claro. Ao ver o desenho dos gráficos era muito mais fácil. Se não, como é que ia conseguir perceber qual era a conjetura? Para a demonstração, ajudou para perceber a relação que existe entre as coordenadas dos pontos das funções, f e f^{-1}.

As suas respostas também indicam que a calculadora influenciou a criação da conjetura, bem como, a identificar a relação que existe entre as coordenadas dos pontos das funções f e f^{-1}. É de realçar, que na estratégia inicial para demonstração, a aluna utiliza a relação encontrada com auxílio da calculadora. Tal, poderá indicar que esta influência o processo desenvolvido na construção de demonstrações.

4.5.3. Tarefa 2

Na segunda tarefa pretende-se que os alunos conjeturem acerca da concavidade de uma função quadrática e demonstrem a sua conjetura para as funções quadráticas do tipo $ax^2, a \neq 0$.

Dada à falta de experiência em trabalhar com a calculadora gráfica, Teresa voltou a mostrar dificuldades em manuseá-la não se revelando muito autónoma neste aspeto e necessitando do auxílio da investigadora para conseguir ultrapassar essa dificuldade. Essas dificuldades, fizeram-se sentir essencialmente aquando da exploração da relação de ordem existente entre os declives de duas quaisquer retas PQ e QP, e o modo como essa relação se reflete na concavidade do gráfico de uma função quadrática, onde que P, Q e R são pontos que pertencem ao gráfico da função, com $x_P < x_Q < x_R$. Após ter ganho alguma segurança, começou a manusear a calculadora com maior destreza e a realizar esta parte da tarefa de forma autónoma.

Também, na restante resolução, a aluna mostrou-se mais autónoma e segura do que na primeira tarefa. Escreveu a sua conjetura, presente na Figura 4.26, sem hesitações na qual refere que quando o coeficiente de x^2 é negativo então o sentido da concavidade é para baixo, caso contrário o sentido da concavidade do gráfico é para cima. Embora não refira a palavra 'gráfico' na formulação da conjetura, a aluna complementa-a com o esboço de duas funções quadráticas tipo $ax^2, a \neq 0$, contemplando cada um deles, os casos em que $a < 0$ e em que $a > 0$.

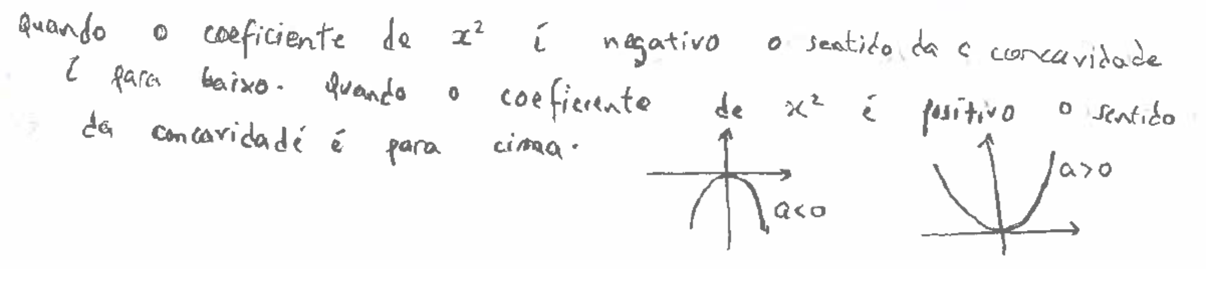
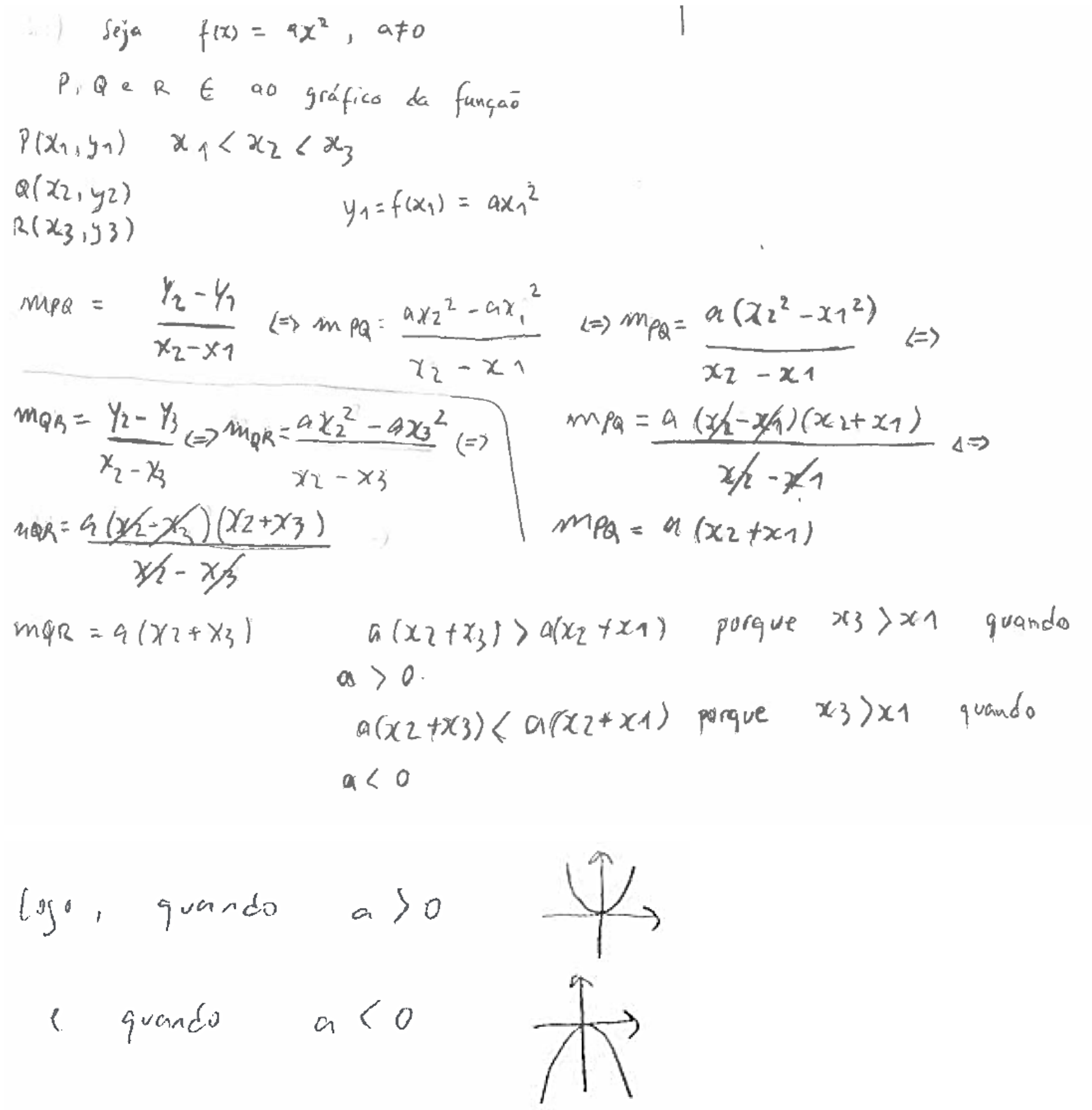


Figura 4.26 – Conjetura elaborada por Teresa na tarefa 2

Em seguida, a aluna parou por uns momentos, mas rapidamente voltou a investigar os gráficos que tinha representados na sua calculadora. Após algum tempo de observação dos gráficos, investigadora reparou que a aluna começou por considerar, na folha de resolução, três pontos P, Q e R, mas que não conseguiu avançar mais na demonstração. Na tentativa de desbloquear a situação, a investigadora sugeriu-lhe que lesse a informação disponível no início da tarefa. A aluna seguiu a sugestão e a partir daí, conseguiu desenvolver uma estratégia para a sua demonstração, começando por determinar os declives das retas PQ e QR (ver Figura 4.27). No entanto, a aluna apresentou algumas dificuldades em descrever o seu raciocínio no final da demonstração não conseguindo justificar convenientemente as relações de ordem entre os declives.


Seja $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$

P, Q e R ∈ ao gráfico da função

$P(x_1, y_1)$ $x_1 < x_2 < x_3$

$Q(x_2, y_2)$

$R(x_3, y_3)$ $y_1 = f(x_1) = ax_1^2$

$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow$

$m_{QR} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \Leftrightarrow m_{QR} = \frac{ax_2^2 - ax_3^2}{x_2 - x_3} \Leftrightarrow$

$m_{PQ} = \frac{a(\cancel{x_2 - x_1})(x_2 + x_1)}{\cancel{x_2 - x_1}} \Leftrightarrow$

$m_{QR} = \frac{a(\cancel{x_2 - x_3})(x_2 + x_3)}{\cancel{x_2 - x_3}}$

$m_{PQ} = a(x_2 + x_1)$

$m_{QR} = a(x_2 + x_3)$

$a(x_2 + x_3) > a(x_2 + x_1)$ porque $x_3 > x_1$ quando $a > 0$.

$a(x_2 + x_3) < a(x_2 + x_1)$ porque $x_3 > x_1$ quando $a < 0$

Logo, quando $a > 0$

$<$ quando $a < 0$

Figura 4.27 – Dedução realizada por Teresa na tarefa 2

Assim que considera a tarefa terminada, Teresa entrega-a. Considerou a tarefa extensa, mas interessante. A descoberta e compreensão de um novo resultado parece ter-lhe despertado um interesse maior por esta tarefa. A maior dificuldade que sentiu foi a realização da demonstração. Mesmo com as dificuldades no manuseamento da calculadora, que apresentou inicialmente, considera que essa foi a parte mais simples de realizar.

I: O que achaste da tarefa?
T: Achei um bocadinho grande, mas foi gira. Foi fixe ver que quando a concavidade da parábola é para cima, os declives das duas retas, com aquelas condições das abcissas, tinham uma relação, mas quando a concavidade era para baixo a relação trocava.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
T: A primeira parte e poder mexer os pontos à vontade foi o mais fácil. O mais difícil, stora? A stora sabe. Claro que foi a demonstração.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?
T: Na conjetura não sei. Mas na demonstração, eu acho que sim. Ajudou a perceber a informação que era dada. Se não fosse possível ver na calculadora, eu acho que não ia perceber muito bem aquela informação e por isso, também não ia conseguir usá-la para fazer a demonstração. Além disso, o facto de ter mexido nos pontos ajudou-me a lembrar que precisava de pontos para encontrar os declives das retas.

Teresa refere que a utilização da calculadora foi importante para perceber informação relevante para a demonstração. Tal poderá sugerir, que a calculadora influenciou a estratégia desenvolvida no processo de demonstração.

4.5.4. Tarefa 3

A terceira e última tarefa “Coordenadas do vértice de uma parábola”, tinha como objetivo determinar as coordenadas do vértice de uma parábola. Com uma estrutura um pouco diferente das anteriores intuía, inicialmente, uma conjetura para a ordenada do vértice que posteriormente seria refutada.

Teresa apresentou grandes dificuldades na última tarefa, não a conseguindo concluir. Resolveu as duas primeiras questões, com o auxílio da calculadora, sem dificuldade. A exploração dos gráficos cartesianos das funções quadráticas, dadas no enunciado, permitiram-lhe determinar de forma rápida as coordenadas do vértice de cada uma das parábolas. Tal, permitiu que a aluna realizasse cálculos com os parâmetros de cada uma das funções quadráticas e encontrasse uma conjetura para a abcissa e para a ordenada do vértice de uma parábola. As conjeturas formuladas para as coordenadas do vértice V de uma parábola foram as esperadas, ou seja, $V\left(-\frac{b}{2a}, b+c\right)$, quando considerada uma função quadrática do tipo $ax^2+bx+c, a \neq 0$. A conjetura para as coordenadas do vértice, formulada por teresa pode ser observada na Figura 4.28.

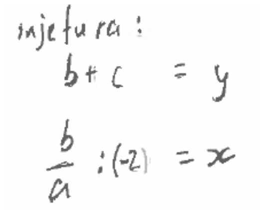


Figura 4.28 – Conjetura elaborada por Teresa na tarefa 3

Teresa demonstra muitas dificuldades quando lhe é sugerido que escreva a expressão analítica da função $ax^2 + bx + c, a \neq 0$, na forma $a(x - h)^2 + k$. Para além de dificuldade, a aluna parece mostrar relutância em relação à resolução da restante tarefa. A investigadora sugere-lhe que tente outra estratégia, que não necessite de aplicar o método de completar o quadrado, mas Teresa assume uma postura de resistência completa recusando-se a avançar. A investigadora não insiste e a aluna dá por terminada a exploração da tarefa entregando-a inacabada.

Durante a entrevista que se seguiu, a aluna teve oportunidade de exprimir o seu desagrado quanto à tarefa, dando conta da sua frustração e dificuldade em avançar.

I: O que achaste da tarefa?
T: Odiei, não gostei. Não percebi nada, nada. Deixou-me frustrada.
I: O que para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
T: Fácil só mesmo o início, de resto foi um horror. Tinha muitas letras. Demasiadas letras. Fiquei toda bloqueada. Nem conseguia pensar. Nem com as perguntas que a stora ia fazendo a ver se eu conseguia. Tudo deixou de fazer sentido.
I: Achas que a utilização da calculadora te ajudou na criação da conjetura?
T: Sei lá, ainda estou bloqueada. No início, quando era para relacionar o a, o b e o c, sim. Se não tivesse a calculadora não ia conseguir adivinhar as coordenadas dos vértices, logo não ia chegar a conjetura nenhuma.

Não foi possível indagar muito sobre a forma como a aluna poderia desenvolver a demonstração. No entanto consegue perceber-se que a calculadora foi útil para criação da conjetura.

4.5.5. Comentário Final

O desempenho de Teresa nas tarefas concluídas e a primeira entrevistas sugerem que a aluna sabe o que é uma demonstração. Que usa um raciocínio para mostrar que algo é sempre verdade. Mesmo, na primeira tarefa onde inicialmente parece existir confusão relativamente à demonstração rapidamente é desfeita pelas conclusões que retira no final. Segundo Teresa, a demonstração apresenta-se como fundamental para a compreensão e aquisição de conhecimento e desempenha um papel importante em termos escolares. Serve para explicar e para validar.

Teresa apenas terminou duas tarefas. Demonstrou algumas falhas ao nível de conhecimentos matemáticos, principalmente na primeira e na última tarefa. Estas falhas podem dever-se à falta de adaptação à tarefa, ou estar relacionadas com o desenvolvimento do raciocínio abstrato. Apresentou, contudo, uma evolução positiva do seu desempenho, da primeira para a segunda tarefa. O mesmo não se verificou, na terceira tarefa, onde a reação de Teresa foi semelhante à que a aluna apresentou nos primeiros testes de Matemática do ano letivo em curso.

A aluna deu preferência à primeira tarefa, relevando a importância da descoberta e assumiu que a calculadora apresenta grande utilidade na criação da conjetura.

I: Qual a tarefa de que mais gostaste? Porquê?
T: A que gostei mais foi a primeira. Sei lá, porque sim. Porque foi mesmo giro descobrir sozinha, só a usar a calculadora, a relação que existe entre o gráfico duma função e o da sua inversa. A calculadora foi muito útil para descobrir esta relação.

As respostas da aluna no final da primeira e da última tarefa e a observação efetuada durante a realização das mesmas parecem indicar que a calculadora potenciou a criação das conjeturas. Na segunda tarefa a calculadora foi importante para perceber informação relevante para a demonstração.

5 Conclusões

Este estudo foi desenvolvido durante o ano letivo 2018/2019 e envolveu alunos de uma turma do 10.º ano. Seguiu uma metodologia qualitativa em que foram considerados cinco estudos de caso. A recolha de dados contou com quatro sessões: três que envolveram todos os alunos simultaneamente e uma sessão individual. A sessão individual consistiu numa entrevista semi-estruturada, enquanto as restantes sessões foram dedicadas à resolução de tarefas. As três tarefas envolveram conteúdos integrados no programa de 10.º ano e foram aplicadas antes de estes terem sido lecionados.

O estudo pretendeu analisar e compreender o modo como a calculadora gráfica pode influenciar o processo de demonstração. Pretendeu, também, perceber se os alunos entendem o que é uma demonstração. Nesse sentido procurou-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

1. Qual o entendimento que os alunos têm de demonstração? Qual a importância que lhe atribuem?
2. De que modo os alunos formulam conjeturas? E de que forma o raciocínio que desenvolvem se relaciona com a utilização da calculadora gráfica na sua atividade com funções?
3. Qual o impacto da utilização da calculadora gráfica sobre o processo de demonstração desenvolvido pelos alunos?

5.1. Noção e importância de demonstração

Durante a investigação a maioria dos alunos mostrou ter uma noção correta de demonstração, quer pelas suas respostas, quer durante a realização das tarefas. De uma forma geral, os alunos definem demonstração como sendo um processo, pelo qual se estabelece a verdade de um dado resultado, a partir de um raciocínio lógico.

Destaca-se o caso de Matilde, que aparenta não saber o que é uma demonstração. O trabalho que desenvolve nas duas primeiras tarefas sugere que, para esta aluna demonstração é um processo pelo qual se confirma determinada afirmação para uma quantidade razoável de casos particulares e depois se generaliza. A análise de resultados deste trabalho sugere que os alunos olham para demonstração como um meio de aprendizagem, encarando a sua realização em aula como um contributo precioso para a compreensão e aquisição dos conteúdos. Consideram a demonstração importante como meio de validação e de explicação de resultados, sendo que a explicação parece assumir uma posição de destaque. Afonso e João referem um sentimento de realização pessoal, quando conseguem realizar a demonstração. A análise indica também que os alunos consideram que a produção de demonstrações contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e consequente, aumento da capacidade de demonstração Matemática. Estes resultados vão de encontro à opinião de Valente (1999) que afirma que, ao "fazer" Matemática, pensa, raciocina, usa a imaginação e a intuição, e organiza a desordem inicial do próprio pensamento.

5.2. Utilização da calculadora gráfica *vs* Formulação de conjeturas

A demonstração não pode separar-se do conceito de conjetura. Neste sentido, o estudo indica que vários alunos não estão familiarizados com a noção de conjetura, sendo que alguns nunca ouviram falar ou não sabem o que é. Tal, influenciou o decorrer das tarefas, sendo mais notório na primeira. Talvez, porque é a primeira vez que contactam com esta abordagem. No entanto, quase todos os alunos conseguiram formular conjeturas em todas as tarefas, com maior ou menor grau de dificuldade e de rigor na linguagem matemática. Os raciocínios que desenvolvem tendem a ocorrer do particular, para o geral. Através de processos indutivos, como observação de casos particulares, analogia e generalização, os alunos formulam as suas conjeturas. Matilde aparenta não sentir necessidade de justificar e demonstrar as suas conjeturas, admitindo o resultado como válido, apenas com base na visualização de exemplos. Afirmação semelhante é feita, também, por Clara e por Teresa na primeira tarefa. Por seu lado Afonso, indica que pode afirmar a sua conjetura, mas não sem antes a demonstrar.

A análise de resultados da investigação evidencia claramente que, em alguns casos, a utilização da calculadora gráfica na atividade com funções facilita a descoberta e formulação de conjeturas. Tal referência foi feita por todos os alunos na tarefa 1 e na tarefa 3. O uso da calculadora gráfica permite uma melhor visualização da representação gráfica das funções e possibilita a exploração de um maior número de exemplos, a sua compreensão e a obtenção de nova informação (como no caso da segunda tarefa). Em algumas situações, a calculadora gráfica parece não influenciar a formulação das conjeturas. Isso, foi notório na segunda tarefa, onde os alunos admitem não ter usado a tecnologia na formulação da sua conjetura. É, no entanto, de ter em conta que a maioria dos alunos, afirma que tal se deveu ao facto de a conjetura a formular estar relacionada com conteúdos, com os quais se encontravam previamente familiarizados. Esta constatação sugere que a influência da utilização da calculadora gráfica na atividade com funções, na formulação de conjeturas, depende do grau de conhecimento do aluno relativamente ao que se pretende estudar. Parece indicar, que quando o conhecimento sobre o teor da matéria a estudar é insipiente, a exploração através da calculadora gráfica, permite um maior auxílio na formulação da conjetura.

5.3. Impacto da utilização da calculadora gráfica sobre o processo de demonstração

A demonstração é apontada, por todos os alunos e em todas as tarefas, como a parte mais difícil de realizar. A primeira tarefa mostrou ser a mais complicada para a maioria dos alunos, talvez por este tipo de tarefa se mostrar um desafio que não estão habituados a realizar. Quatro dos alunos não fizeram ou não conseguiram realizar a demonstração nesta tarefa. João não fez a demonstração e o seu insucesso parece estar relacionado com o facto de não estar habituado a realizar este tipo de tarefas, com a sua insegurança e com o facto de não ter presente os conteúdos matemáticos necessários à realização da demonstração, nomeadamente o modo de determinar a mediatriz de um segmento de reta. Clara, Matilde e Teresa não conseguiram fazer a demonstração da primeira tarefa. No entanto, Matilde e Teresa adotam, no início da resolução, uma estratégia que permitiria desenvolver a demonstração, mas não a conseguem concluir, generalizando o resultado com base na observação e exploração dos exemplos efetuada com a calculadora gráfica. Já Clara não consegue desenvolver qualquer tipo de raciocínio abstrato.

O desempenho dos alunos na segunda tarefa, no que diz respeito à realização da demonstração foi melhor do que o da primeira. Quatro alunos conseguiram construir um raciocínio dedutivo adequado. João, embora tenha tido dúvidas no cálculo de declives conseguiu ultrapassar a sua dificuldade apoiando-se em exemplos. Também Clara se apoia em cálculos efetuados no início da tarefa para, por analogia, construir a sua demonstração. A prestação de Matilde é semelhante à que teve na primeira tarefa, começando por utilizar uma estratégia que permitiria desenvolver a demonstração. Considera três pontos quaisquer pertencentes ao gráfico de uma função quadrática do tipo $ax^2, a \neq 0$, mas também aqui acaba por fazer generalizações, com base na observação de um exemplo. Nesta tarefa, quase todos os alunos indicam ter utilizado a informação dada no início da tarefa, para estruturar a sua demonstração, no entanto nunca a utilizam para justificar a sua conclusão.

Na última tarefa João apresenta dificuldades em desenvolver um raciocínio por analogia para conseguir escrever qualquer função quadrática na forma $a(x-h)^2+k, a \neq 0$, acabando por abandonar o processo e assumindo o resultado válido, de modo a prosseguir com a resolução da tarefa. Também, Teresa não concluiu a terceira tarefa, entregando-a com a demonstração por fazer. Nesta tarefa, a aluna apresenta dificuldades de abstração, não conseguindo sequer desenvolver um raciocínio por analogia com os exemplos trabalhados para recordar o método de completar o quadrado. Destaca-se a prestação de Matilde nesta tarefa, que ao contrário das tarefas anteriores conseguiu, de forma muito organizada, concretizar a sua demonstração. Quase sem utilizar palavras, apoia-se na representação de gráficos que constrói por analogia com os observados na calculadora gráfica.

Há a destacar o desempenho de Afonso em todas as tarefas. O aluno tem bom raciocínio dedutivo e é o único que consegue realizar todas as demonstrações. Utiliza sempre linguagem Matemática nas suas demonstrações, mas dá pouca atenção às justificações. Compreendeu os objetivos de todas as tarefas e foi capaz de traduzir os seus raciocínios dedutivos de forma adequada.

Quando avaliamos o impacto que a utilização da calculadora tem no processo de construção da demonstração, o estudo parece indicar direções distintas. Na segunda tarefa, tal como na conjetura, utilização da calculadora não é apontada como facilitadora do processo de demonstração. Contudo, é apontada como necessária à compreensão de informação, necessária à sua realização. Nas outras tarefas a calculadora é apontada como meio facilitador para a construção do processo de demonstração. Esse benefício é mais evidente na terceira tarefa, onde a utilização da representação gráfica e das propriedades geométricas dos gráficos de funções parece ter ajudado quase todos os alunos a estruturar e construir a demonstração. O estudo sugere que a representação gráfica de funções e a manipulação na calculadora gráfica, permitem a exploração de conjeturas e proporcionam a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal.

5.4. Considerações finais

Nesta investigação, os alunos depararam-se com algumas dificuldades na construção de cadeias argumentativas, contudo é de destacar a importância de os estimular a justificarem as suas ideias e a utilizar linguagem adequada, de modo a compreender e resolver tarefas desta natureza. As justificações levam os alunos a pensar e refletir com mais cuidado quando resolvem uma tarefa, mesmo que não consigam alcançar todos os resultados desejados.

Os alunos que integraram esta investigação nunca tinham tido oportunidade de trabalhar com a calculadora gráfica na aula de Matemática. Tal, provocou algumas dificuldades ao nível do manuseamento, mais notório nas duas primeiras tarefas. Contudo, é de notar a rápida adaptação dos alunos à tecnologia em questão, conseguindo tirar partido das suas potencialidades.

Em termos gerais o estudo indica que para a maioria dos alunos, demonstração é um raciocínio lógico que estabelece a verdade de uma afirmação. Sugere que a maioria dos alunos consegue desenvolver um raciocínio abstrato. Que a demonstração potencia a compreensão dos conteúdos matemáticos e ajuda a desenvolver o raciocínio lógico. Também, aponta no sentido do uso da calculadora gráfica influenciar positivamente a atividade com funções, no que concerne à formulação da conjetura, bem como ao processo de construção da demonstração.

Também, se pode intuir do conjunto de respostas dos alunos, que apesar de sentirem sérias dificuldades na realização de algumas das tarefas propostas, nomeadamente por serem claramente diferenciadoras daquilo que que costumam realizar na disciplina de Matemática, acabam no geral por aderir muito bem a este tipo de estudo.

Este estudo permitiu condições para os alunos refletirem, de uma forma diferenciada nos conceitos matemáticos, valorizando aspetos, que claramente a maioria deles, não estava habituado a valorizar no seu estudo. Importa, pois, perceber e aprofundar, em estudos futuros, se os resultados obtidos neste trabalho são idênticos quando se consideram outros alunos do mesmo nível de escolaridade ou de níveis de escolaridade diferente. Seria também de interesse tentar compreender se a utilização da calculadora gráfica motiva os alunos a desenvolverem as suas próprias demonstrações e qual o efeito que este tipo de trabalho pode ter nos seus resultados escolares.

Referências

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Amado, J. (2013). *Manual de investigação qualitativa em educação.* Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Amado, N., Sanchez, J., & Pinto, J. (2015). A utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. *Bolema, 52*, 637-657.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em matemática. *Educação e Matemática, 63*, 11-15.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação – uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Braumann, C. (2002). Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-24). Lisboa: SEM-SPCE.

Brocado, J. (2001). *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8.º ano.* Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Carvalho, F. (2016). *Rómulo de Carvalho: um perfil e um testemunho pessoal*. Aveiro. Obtido em 10 de abril de 2019, de http://www.100anos-romulogedeao.info/agenda/files/SPFisica-Aveiro-06Set06-site.doc

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em tecnologia educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação, 15*(1), 221-243.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática.* (F. M. Louro, & R. M. Ribeiro, Trads.) Lisboa: Gradiva.

de Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad (Traduzido). *Educação e Matemática*, 62, 31-36.

de Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*, 397-418.

de Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras*, *33*(3), 1-8.

DGE - Direção Geral da Educação (2018). Aprendizagens Essenciais. *Aprendizagens Essenciais em Articulação Perfil do Aluno - Matemátia A – 10.º ano*. Lisboa: Direção Geral da Educação.

Dooley, L. M. (2002). Case Study Research and Theory Building. *Academy of Human Resource Development, 4*, 335-354.

Fernandes, J. A., & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim SPM, 39*, 43-55.

Freitas, P. (2011). A demonstração matemática no ensino básico e secundário. In *Atas do PROFMAT2011* (pp. 1-12). Lisboa: APM.

Gil, A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (6.ª ed.). São Paulo: Editora Atlas.

Hanna, G. (1996). The role of proof in mathematics education. *Journal of Mathematics Education, 11*, 155-168.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM, 40*(2), 329-336.

Hersh , R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Kripka, R., Scheller, M., & Bonotto, D. L. (2015). Pesquisa Documental: considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa. In A. P. Costa, D. Neri de Souza, E. S. Oliveira, M. Rua, & R. N. Linhares (Eds.), *Atas CIAIQ2015: 4.º Congresso Ibero-Americano em Investigação Qualitativa e do 6.º Simpósio Internacional de Educação e Comunicação*, *2*, 243-247. Aracajú.

Lourenço, M. L. (2002). A demonstração com informática aplicada à educação. *Bolema, 15*(18), 100-111.

Machado, S. (2006). A aprendizagem da demonstração matemática no 8.º ano no contexto da utilização do Geometer's Sketchpad. *Educação e Matemática, 86*, 10-16.

Mariotti, A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In P. A. Gutiérrez (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

MEC (2012). *Programa e Metas Curriculares - Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

MEC (2013). *Programa e Metas Curriculares – Matemática A*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Meirinhos, M., & Osório, A. (2010). O estudo de caso como estratégia de investigação em educação. *EDUSER - Revista de Educação, 2*(2), 50-65.

Meissner, H. (1983). Constructing mathematical concepts with calculators or computers. *European Research in Mathematics Education III*, 1-10.

Mourão, A. P. (2002). A teoria da reificação de Anna Sfard: O caso das funções. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de Investígação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 275-290). Lisboa: SEM-SPCE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM (Trabalho original publicado em 2000).

Oliveira, P. A. (2002). A aula de matemática como espaço epistemológico forte. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia , N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 25-40). Lisboa: SEM-SPCE.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: induction and analogy in mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3-8.

Ponte, J. P. (1995). Novas tecnologias na aula de matemática. *Educação e Matemática, 34,* 2-7.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais. Em P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119-138). Lisboa: Projecto MPT e APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula? *Educação e Matemática, 133*, 26-35.

Ponte, J., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Práxis Educativa, 7*(2), 355-377.

Reid, D. (2005). The Meaning of Proof in Mathematics Education. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of CERME4* (pp. 458-468). Sant Feliu de Guíxols: European Research in Mathematics Education.

Reid, D., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education.* Rotterdam: Sense Publishers.

Rocha, H. (2015). O formalismo matemático num contexto de utilização da tecnologia. In *Atas do XXVI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 22-35). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2018). Demonstração Matemática versus Demonstração no ensino da Matemática - a Perspetiva de Professores. In A. Caseiro, A. Domingos, J. Matos, F. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Org.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 70-82). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2019). Mathematical proof: from mathematics to school mathematics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A, 377*(2140), 1-29.

Rodrigues, A. (2016). *O raciocínio funcional de alunos de 8.º ano na resolução de tarefas.* Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Rodrigues, M. M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de matemática.* Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Lisboa.

Saraiva, M. J., Teixeira, A. M., & Andrade, J. M. (2010). Estudo das funções no programa de matemática a com problemas e tarefas de exploração. In *Projecto IMLNA: Promover a Aprendizagem Matemática em Números e Álgebra*. Lisboa: Materiais divulgados com o apoio da APM.

Serrazina, L. (2017). Contributos da investigação para a aprendizagem da matemática: uma visão global. *Educação e Matemática, 144-145*, 2-8.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2019). Context and Implications document of Secondary students' proof constructions in mathematics: The role of written versus oral mode of argument representation. *Review of Education, 7*(1), 156-182.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 119-127.

Subtil, M., & Domingos, A. (2018). A génese instrumental com a calculadora gráfica na demonstração do Teorema de Pitágoras no 8.º ano de escolaridade. In A. Caseiro, A. Domingos, J. Matos, F. Santos, M. Almeida, P. Teixeira & R. Machado (Org.), *Atas do XXIX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 155-171). Lisboa: APM.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso - Planejamento e Métodos* (2.ª ed.). Porto Alegre: Bookman.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. Em F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: IAP-NCTM.

Anexos

Anexo 1

Matriz de construção do indicador individual de classe

Profissões (grandes grupos/CNP 94)	Situação na profissão		
	Patrões	Trabalhadores por conta própria (+trab. familiares)	Trabalhadores por conta de outrem (+m.a.c. + outros)
1. Quadros sup. da adm. pública, dirigentes e quadros sup. de empresas	EDL	EDL	EDL
2. Especialistas das profissões intelectuais e científicas	EDL	EDL	PTE
3. Técnicos e profissionais de nível intermédio	EDL	EDL	PTE
4. Pessoal administrativo e similares	EDL	TI	EE
5. Pessoal dos serviços e vendedores	EDL	TI	EE
6. Agricultores e trabalhadores qualificados da agricultura e pescas	EDL	AI	AA
7. Operários, artífices e trabalhadores similares	EDL	TI	OI
8. Operadores de instalações e máquinas e trab. da montagem	EDL	TI	OI
9.1 Trabalhadores não qualificados dos serviços e comércio	EDL	TI	EE
9.2 Trabalhadores não qualificados da agricultura e pescas	EDL	AI	AA
9.3 Trabalhadores não qualificados da construção, indústria e transportes	EDL	TI	OI

EDL Empresários, Dirigentes e Profissionais Liberais

AA Assalariados Agrícolas

OI Operários Industriais

EE Empregados Executantes

AI Agricultores Independentes

TI Trabalhadores Independentes

PTE Profissionais Técnicos e de Enquadramento

Matriz de construção do indicador familiar de classe

	Homem						
Mulher	**EDL**	**PTE**	**TI**	**AI**	**EE**	**OI**	**AA**
EDL	EDL	EDL	EDL	EDL	EDL	EDL	EDL
PTE	EDL	PTE	PTE	PTE	PTE	PTE	PTE
TI	EDL	PTE	TI	TIpl	TIpl	TIpl	TIpl
AI	EDL	PTE	TIpl	AI	AIpl	AIpl	AIpl
EE	EDL	PTE	TIpl	AIpl	EE	AEpl	AEpl
OI	EDL	PTE	TIpl	AIpl	AEpl	OI	AEpl
AA	EDL	PTE	TIpl	AIpl	AEpl	AEpl	AA

EDL Empresários, Dirigentes e Profissionais Liberais

PTE Profissionais Técnicos e de Enquadra

AEpl Assalariados Executantes Pluriactivos

AA Assalariados Agrícolas

OI Operários Industriais

EE Empregados Executantes

AIpl Agricultores Independentes Pluriactivos

AI Agricultores Independentes

TIpl Trabalhadores Independentes Pluriactivos

TI Trabalhadores Independentes

Anexo 2

ENTREVISTAS

1ª Entrevista

1. O que pensas da Matemática?
2. Qual ou quais os conteúdos da disciplina que mais gostas? E os que menos gostas?
3. Quais os conteúdos que para ti são mais simples? E em quais tens mais dificuldades? Porque achas que isso acontece?
4. O que é, para ti, uma demonstração matemática?
5. Para que achas que serve a demonstração?
6. Achas que as demonstrações são úteis na aquisição e compreensão dos conteúdos da disciplina?
7. Costumas fazer demonstrações na aula de matemática?
8. Se sim:
    a. A partir de que ano te lembras de começar a fazer?
    b. Como e por quem eram feitas?
    c. Como te sentias na altura?
    d. E atualmente, como te sentes?
    e. Achas que se deviam fazer mais ou menos demonstrações nas aulas? E quem achas que as deveria fazer? Porquê?

Entrevista pós-tarefas

1. O que achaste da tarefa?
2. O que o para ti foi mais fácil? E o que foi mais difícil?
3. Achas que a utilização calculadora te ajudou na criação da conjetura? E no processo de demonstração?

Anexo 3

TAREFA 1 | RELAÇÃO GEOMÉTRICA ENTRE O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO E O DA RESPETIVA INVERSA

Esta tarefa é para ser efetuada com recurso á calculadora gráfica, utilizando "zoom quadrado".

1. Considere a seguinte função real de variável real definida por $f(x) = 2 + x^3$.
   Represente-a na Calculadora Gráfica e indique:
   a. O domínio e o contradomínio de *f*.
   b. Pontos de intersecção com os eixos coordenados.
2. Admita que a função inversa de *f* é dada por $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$**.**
   Represente, no mesmo referencial, o gráfico de f^{-1} e compare os gráficos relativamente aos seguintes aspetos:
   a. Domínio e Contradomínio.
   b. Pontos de interseção com os eixos coordenados.
   Que conclusões pode tirar?
3. Ainda no mesmo referencial, represente a reta de equação $y = x$ (bissetriz dos quadrantes impares). Que relação geométrica encontra entre o gráfico das duas funções?
4. Considere agora as seguintes funções reais de variável real definidas por:
   $g(x) = 2x - 3$
   $h(x) = 2x^2 + 1, x \geq 0$
   Para cada uma das funções, represente, no mesmo referencial, o gráfico da função e o da sua inversa. Averigue se e a relação geométrica se mantém nestes casos.
5. Com base no que observou formule uma conjetura. Achas que, sempre que uma função admite inversa, essa relação se mantém? Se sim, podes afirmá-lo apenas com base na observação de exemplos?
6. Demonstra que a tua conjetura é válida para qualquer função real de variável real que admita inversa.

Anexo 4

TAREFA 2 | SENTIDO DA CONCAVIDADE DO GRÁFICO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

Esta tarefa é para ser efetuada com recurso á calculadora gráfica.

<u>Antes de iniciares a tarefa lê com atenção seguinte informação:</u>

Dada uma função real de variável real *f*, o gráfico de *f*, tem concavidade voltada para cima num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico , de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior ao da reta QR.

Dada uma função real de variável real *f*, o gráfico de *f*, tem concavidade voltada para baixo num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico , de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é superior ao da reta QR.

1. Considera a função real de variável real definida por $f_1(x) = 2x^2 + 3x - 5$ e o intervalo *I*=[-4, 3]
   a) Marca, no gráfico da função, os pontos *P*, *Q* e *R* cujas abcissas pertençam a *I* e verifiquem a condição $x_P < x_Q < x_R$.
   b) Traça as retas *PQ* e *QR*. Determina os seus declives e compara-os.
   c) Move os pontos *P*, *Q* e *R*, mantendo sempre a relação de ordem existente entre eles ($x_P < x_Q < x_R$), e compara os os declives das retas *PQ* e *QR*. O que se pode concluir?
   d) Relaciona o sentido da concavidade do gráfico da função com o declive das retas *PQ* e *QR*.
2. Considera a função real de variável real definida por $f_2(x) = -2x^2 - 4x - 1$ e o intervalo *I*=[-3, 5]
   a) Marca, no gráfico da função, os pontos *P*, *Q* e *R* cujas abcissas pertençam a I e verifiquem a condição $x_P < x_Q < x_R$.
   b) Traça as retas *PQ* e *QR*. Determina os seus declives.
   c) Move os pontos *P*, *Q* e *R*, mantendo sempre a relação de ordem existente entre eles ($x_P < x_Q < x_R$), e compara os os declives das retas *PQ* e *QR*. O que se pode concluir?
   d) Relaciona o sentido da concavidade do gráfico da função com o declive das retas *PQ* e *QR*.
3. Observa os exercícios 1 e 2 e conjetura sobre o sentido da concavidade do gráfico e o coeficiente de x^2.

4. Considera a família de funções reais de variável real do tipo $f_3(x) = ax^2$. Marca, no gráfico da função, os pontos P, Q e R cujas abcissas verifiquem a condição $x_P < x_Q < x_R$. Efetua variações do parâmetro a na classe de funções ax^2 e compara os declives das reta PQ e QR.

   a) Procura uma relação entre o sinal de a e o sentido de concavidade do gráfico da função. Conjetura sobre o sentido de concavidade do gráfico da função no seu domínio.

   b) Demonstra a tua conjetura.

Anexo 5

TAREFA 3 | COORDENADAS DO VÉRTICE DE UMA PARÁBOLA

Esta tarefa é para ser efetuada com recurso á calculadora gráfica.

1. Considera as funções reais de variável real, pertencentes à família de funções do tipo $ax^2 + bx + c, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$,

$f_1(x) = x^2 - 4x + 1$ $\quad f_2(x) = 2x^2 - 8x + 5$ $\quad f_3(x) = 5x^2 - 20x - 6$

$f_4(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 9$ $\quad f_5(x) = 3x^2 - 12x + 1$ $\quad f_6(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

a) Traça o gráfico das funções anteriores e determina as coordenadas do vértice de cada uma delas.

b) Tenta encontrar uma relação entre as coordenadas do vértice e os parâmetros a, b e c, da cada uma delas e faz uma conjetura sobre as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática.

2. Considera agora as funções reais de variável real definidas por:

$$f_7(x) = -x^2 - 4x - 1 \quad \text{e} \quad f_8(x) = 5x^2 + 2x + 4 .$$

Traça o gráfico das funções e verifica se a tua conjetura é válida para estas funções.

3. Demonstra que para qualquer função real de variável real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ as coordenadas do vértice do seu gráfico são $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Sugestões:

- Escreve a expressão analítica da função na forma $a(x-h)^2 + k$ $(a \neq 0)$ e verifica que $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = c - \frac{b^2}{4a}$.
- Justifica que se $f(x) = a(x-h)^2 + k$ $(a \neq 0)$, o ponto (h, k) é vértice da parábola usando translações do gráfico ou relacionando-o com o contradomínio da função.

Anexo 6

AUTORIZAÇÃO

Exmo. Sr. Encarregado de Educação,

Venho por este meio, informá-lo/a de que, no âmbito do estágio curricular do Mestrado em Ensino da Matemática do 3.º ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário, da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, pretendo realizar uma investigação envolvendo os alunos da turma. Esta investigação terá como objetivo estudar a capacidade de demonstração matemática de alunos do 10.º ano de escolaridade, num contexto de utilização da calculadora gráfica. Assim, o seu educando realizará uma entrevista e em conjunto com alguns colegas, realizará algumas tarefas enquadradas no domínio de funções reais de variável real, para análise posterior. Em todo o processo será garantido o anonimato de todos os participantes. Serão realizadas 4 sessões de trabalho no início do mês de abril.

Tendo o seu educando manifestado disponibilidade e interesse para participar no estudo em causa, solicito a sua autorização. Caso necessite de algum esclarecimento estarei disponível para responder. Agradeço antecipadamente a sua atenção!

Cumprimentos,

A professora estagiária | A professora de matemática

_______________________________ | _______________________________

Eu, ____, Encarregado de Educação do aluno ____, n.º_______, do 10.º ano, turma B, autorizo a integração do meu educando na investigação, e sua participação nas atividades acima descritas.

Data:_______________ ___________________________________

(Assinatura Encarregado de Educação)